



UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MODELAGEM MATEMÁTICA E
COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO

ESTUDO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS
PARA A EQUAÇÃO DE RICHARDS
ATRAVÉS DO MÉTODO DE VOLUMES
FINITOS PARA SIMULAÇÃO DE
FLUXO UNIDIMENSIONAL: UM
ESTUDO DE CAMPO

Isabela de Aquino Souza

2020



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

ESTUDO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA A EQUAÇÃO
DE RICHARDS ATRAVÉS DO MÉTODO DE VOLUMES
FINITOS PARA SIMULAÇÃO DE FLUXO
UNIDIMENSIONAL: UM ESTUDO DE CAMPO

ISABELA DE AQUINO SOUZA

Sob a orientação da professora
Rosane Ferreira de Oliveira

e Co-orientação do professor
Wilian Jeronimo dos Santos

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção o grau de Mestre em Ciências, no Curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

Seropédica, RJ
Agosto de 2020

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S719e Souza, Isabela de Aquino, 1992-
ESTUDO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA A EQUAÇÃO DE
RICHARDS ATRAVÉS DO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS PARA
SIMULAÇÃO DE FLUXO UNIDIMENSIONAL: UM ESTUDO DE CAMPO
/ Isabela de Aquino Souza. - Rio de Janeiro, 2020.
156 f.

Orientadora: Rosane Ferreira de Oliveira.
Coorientador: Wilian Jeronimo dos Santos.
Dissertação (Mestrado). -- Universidade Federal
Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em
modelagem matemática e Computacional, 2020.

1. Fluxo de Água em Solo Não-Saturado. 2. Simulação
Numérica e Computacional. 3. Equação de Richards. 4.
Método de Volumes Finitos. I. Oliveira, Rosane
Ferreira de, 1963-, orient. II. Santos, Wilian
Jeronimo dos, -, coorient. III Universidade Federal
Rural do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em
modelagem matemática e Computacional. IV. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS



HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 33/2020 - ICE (12.28.01.23)

Nº do Protocolo: 23083.040755/2020-21

Seropédica-RJ, 26 de agosto de 2020.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E
COMPUTACIONAL- PPGMMC

ISABELA DE AQUINO SOUZA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós Graduação em Modelagem Matemática e Computacional - PPGMMC.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 18/08/2020.

Conforme deliberação número 001/2020 da PROPPG, de 30/06/2020, tendo em vista a implementação de trabalho remoto e durante a vigência do período de suspensão das atividades acadêmicas presenciais, em virtude das medidas adotadas para reduzir a propagação da pandemia de Covid-19, nas versões finais das teses e dissertações as assinaturas dos membros da banca examinadora foram substituídas por documento(s) com assinaturas eletrônicas.

Banca examinadora: Profa. Rosane Ferreira de Oliveira. D. Sc PPGMMC - UFRRJ
(Orientadora-Presidente)

Prof. Marcos Bacis Ceddia. D. Sc PPGMMC -UFRRJ

Prof. João Frederico da Costa Azevedo Meyer. D.Sc. UNICAMP

Prof. Wenceslau Geraldes Teixeira. D.Sc. EMBRAPA

Obs: Este documento deverá ser anexado ao final da dissertação

(Assinado digitalmente em 12/09/2020 21:05)

MARCOS BACIS CEDDIA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptS (12.28.01.00.00.33)
Matricula: 1220296

(Assinado digitalmente em 02/09/2020 18:41)

ROSANE FERREIRA DE OLIVEIRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.63)
Matricula: 377679

(Assinado digitalmente em 15/09/2020 15:27)
JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 378.941.888-91

(Assinado digitalmente em 02/09/2020 14:29)
WENCESLAU GERALDES TEIXEIRA
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 054.559.398-07

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufrj.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: **33**, ano: **2020**, tipo: **HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**, data de emissão: **26/08/2020** e o código de verificação: **91341e7c99**

Agradecimentos

A Deus, por ter me sustentado sempre, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades, Ele foi o meu auxílio em todos os momentos, e à Ele sou grata de todo o coração.

Aos meus pais que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida, à eles todo o meu amor e gratidão .

Ao meu esposo, Leonardo, que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dúvidas e dificuldade.

Às minhas irmãs, Isadora e Iasmin que, com muito senso de humor, amenizaram meus momentos de preocupação.

Aos meus orientadores, Rosane e Wilian, que compartilharam comigo o conhecimento, bem mais precioso que se pode conquistar. Em especial à professora Rosane, pela paciência na orientação e incentivo, sem os quais não seria possível a conclusão desta dissertação.

O trabalho descrito nas próximas páginas não teria sido possível sem a parceria, disponibilidade sem fim, boa vontade e trabalho árduo do técnico laboratorista Martin de Oliveira Freire, a quem agradeço imensamente. De fato, todo trabalho relacionado ao experimento foi feito em equipe e agradeço, profundamente, à coordenação geral do professor Marcos Bacis Ceddia e à toda equipe do SIPA (Sistema Integrado de Produção Agroecológica) da Fazendinha Agroecológica Km 47. Meu sincero agradecimento à Fernanda da Costa Santos, colega de trabalho muito solícita e que muito ajudou neste processo de coleta e processamento de dados de campo.

Agradeço também a todos os professores do PPGMMC que me acompanharam durante o mestrado e foram tão importantes na minha vida acadêmica e no desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço às agências de fomento ANP, Petrobras e Fapur/UFRRJ, pelo apoio financeiro para o desenvolvimento desta, disponibilizado através do projeto Petro Mapeamento Digital.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/UFRRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTUDO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA A EQUAÇÃO DE RICHARDS
ATRAVÉS DO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS PARA SIMULAÇÃO DE
FLUXO UNIDIMENSIONAL: UM ESTUDO DE CAMPO

Isabela de Aquino Souza

Agosto/2020

Orientadores: Rosane Ferreira de Oliveira

Wilian Jerônimo dos Santos

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Apresenta-se, nesta dissertação, um estudo do modelo numérico baseado no método de volumes finitos para fluxo de escoamento vertical de água em solos. Na modelagem clássica de fluxo de água no solo é utilizada a Equação de Richards (ER). Pela não linearidade desta equação, busca-se uma solução computacional. Trabalha-se com a forma mista da ER e, preferencialmente, com esquema implícito de discretização do tempo. A não linearidade foi tratada através do método de Picard. Um código computacional foi implementado, tendo em vista prever o fluxo de água em um solo heterogêneo considerado com duas camadas. Para a verificação e aplicabilidade do código foi realizado um experimento de campo. As saídas computacionais foram comparadas aos dados de campo e às saídas do pacote Hydrus.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/UFRRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

STUDY OF NUMERIC SOLUTIONS FOR THE RICHARDS EQUATION
USING THE FINITE VOLUME METHOD FOR UNIDIMENSIONAL FLOW
SIMULATION: A FIELD STUDY

Isabela de Aquino Souza

August/2020

Advisors: Rosane Ferreira de Oliveira

Wilian Jerônimo dos Santos

Department: Mathematical and Computational Modeling

In this work, a study of the numerical model based on the finite volume method for vertical water flow in soils is presented. In the classical modeling of water flow in the soil, the Richards Equation (ER) is used. Due to the non-linearity of this equation, working with a computational solution is suggested. The study focuses on investigating the mixed form of RE and, preferably, with an implicit time discretization scheme. Non-linearity was resolved using the Picard method. A computational code was implemented, in order to predict the flow of water in a soil composed of two layers and which was 69 cm deep. For the verification and applicability of the code, a field experiment was prepared. The computational outputs were compared to field data and with the Hydrus package.

Lista de Figuras

1.1	Planossolo avaliado na atividade de campo.	6
2.1	Diagrama ilustrando o experimento realizado por Darcy	12
2.2	Exemplos de curvas de retenção	15
2.3	Esquema de uma placa de pressão. Fonte REICHARDT e TIMM (2004).	16
3.1	Esquema de balanço de massa	20
3.2	Elemento de volume de solo	21
4.1	Esquema de volumes finitos	28
5.1	Resultado de simulações para solo 1 com base no modelo de Haverkamp e esquema de discretização temporal explícito.	39
5.2	Resultado de simulações para solo 1 com base no modelo de Haverkamp e esquema de discretização temporal implícito.	40
5.3	Resultado de simulações para solo 2 com base no modelo de van-Genuchten e esquema de discretização temporal explícito.	41
5.4	Resultado de simulações para solo 2 com base no modelo de van-Genuchten e esquema de discretização temporal implícito	41
5.5	Curvas de retenção ajustadas em escala logarítmica no eixo das ordenadas.	46
5.6	Condições adicionais para horizontes A e E interpoladas por polinômio de grau 3.	50
5.7	Condições adicionais para horizontes A e E ajustadas por função sigmoidal.	52

5.8	Variação da umidade com a profundidade e com o tempo. Comparação entre dados observados em campo e obtidos por simulação nos <i>softwares</i> Octave e Hydrus 1D, utilizando modelo de van-Genuchten para curva de retenção. Condições inicial e de fronteira dos horizontes A e E variando com o tempo por interpolação polinomial.	55
5.9	Variação da umidade com a profundidade e com o tempo. Comparação entre dados observados em campo e obtidos por simulação nos <i>softwares</i> Octave e Hydrus 1D, utilizando modelo de van-Genuchten para curva de retenção. Condições inicial e de fronteira dos horizontes A e E variando com o tempo por ajuste sigmoidal.	57
5.10	Comparação entre as condutividades hidráulicas, descritas pelo método de Mualem para as curvas de van-Genuchten e Brooks-Corey, calculadas em função do teor de umidade medido em campo.	59
5.11	Variação da umidade com a profundidade e com o tempo. Comparação entre dados observados em campo e obtidos por simulação nos <i>softwares</i> Octave e Hydrus 1D, utilizando modelo de Brooks-Corey para curva de retenção. Condições inicial e de fronteira dos horizontes A e E variando com o tempo por interpolação polinomial.	61
5.12	Variação da umidade com a profundidade e com o tempo. Comparação entre dados observados em campo e obtidos por simulação nos <i>softwares</i> Octave e Hydrus 1D, utilizando modelo de Brooks-Corey para curva de retenção. Condições inicial e de fronteira dos horizontes A e E variando com o tempo por ajuste sigmoidal.	63
5.13	Estudo de convergência para as soluções aproximadas $\theta(z_i, t_j)$, considerando os passos de tempo $\Delta t = 1; 0,5; 0,25; 0,125$ e $0,0625s$	65
B.1	Retirada da grama existente no local do experimento.	87
B.2	Planossolos avaliados nas atividades em campo.	87
B.3	Esquema de cotas experimentais	88
B.4	Vista superior de uma cota experimental	88
B.5	TRIME-PICO IPH transmitindo dados, via <i>bluetooth</i> , para TRIME-PICO BT	89
B.6	Introdução do TDR.	89
B.7	Posicionamento da caixa d'água em relação às parcelas experimentais.	90
B.8	Manutenção da carga hidráulica	91
B.9	Amostras de solo secando ao ar.	93
B.10	Amostras peneiradas e acomodadas em recipientes de PVC.	94
B.11	Medição de umidade volumétrica e constante dielétrica com o sensor TDR.	95

B.12 Amostra sendo pesada e pronta para ser colocada na estufa.	96
B.13 Curva de calibração para o horizonte A.	97
B.14 Curva de calibração para o horizonte E.	97
B.15 Curva de calibração para o horizonte B.	98
B.16 Curva de calibração para os horizontes A, E e B.	98
B.17 Curva de calibração para os horizontes A e E.	99
C.1 Criação de um novo projeto no Hydrus 1D.	100
C.2 Especificação do processo a ser estudado.	101
C.3 Determinação da geometria do fenômeno estudado.	101
C.4 Informações referentes à malha temporal.	102
C.5 Informações relevantes para armazenamento e impressão de dados em tela.	103
C.6 Critérios de iteração e controle de etapa de tempo.	103
C.7 Escolha do modelo e de parâmetros hidráulicos.	104
C.8 Informações referentes ao perfil de solo.	105
C.9 Especificação de condições de contorno superior e inferior.	106
C.10 Resumo do perfil de solo.	108

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros para curva de retenção do solo 1.	37
5.2	Parâmetros para curva de retenção do solo 2.	37
5.3	Relação entre o potencial matricial e a umidade volumétrica relativa aos horizontes A e E do solo estudado para ajuste de parâmetros da curva de retenção.	45
5.4	Parâmetros para relações constitutivas de van-Genuchten em cada horizonte do perfil analisado.	45
5.5	Parâmetros para relações constitutivas de Brooks-Corey em cada horizonte do perfil analisado.	45
5.6	Condutividade hidráulica saturada.	47
A.1	Dados físicos e morfológicos do perfil P2.	77
A.2	Dados físicos e morfológicos do perfil P2.	78
A.3	Dados físicos e morfológicos do perfil P5.	80
A.4	Dados físicos e morfológicos do perfil P5.	81
A.5	Dados físicos e morfológicos do perfil P7.	84
A.6	Dados físicos e morfológicos do perfil P7.	85

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Básicos	5
1.1 Conceitos básicos de física do solo	5
2 O Fenômeno Água no Solo	9
2.1 Potencial Hidráulico	9
2.2 Carga Hidráulica	10
2.3 Modelos para Fluxo de Água no Solo	12
2.3.1 Lei de Darcy	12
2.3.2 Equação de Darcy-Buckingham	13
2.3.3 Curva de retenção da água no solo	14
2.4 Modelos para a curva de retenção	17
2.4.1 O modelo de Brooks e Corey	17
2.4.2 O modelo de Haverkamp	18
2.4.3 O modelo de van Genuchten	18
3 Modelo Matemático	20
3.1 Equação da Continuidade	20
3.2 Equação de Richards	22
3.3 Condições Adicionais	23
4 Modelo Numérico	27
4.1 Método de Volumes Finitos	27
4.2 Aplicação	29
4.2.1 Discretização espacial	29
4.2.2 Discretização Temporal	30
5 Simulações, Resultados e Discussões	36
5.1 Verificação computacional para dados da literatura	36

5.1.1	Resultados	38
5.2	Simulação com dados de campo	42
5.2.1	Experimento de campo	42
5.2.2	Relações constitutivas e obtenção dos parâmetros de ajuste . .	44
5.2.3	Condutividade hidráulica saturada (K_s)	46
5.2.4	Condição inicial e de fronteira	47
5.3	Simulações: resultados e discussão	53
5.3.1	Ensaio 1: Ajuste polinomial e modelo de van-Genuchten para curva de retenção	54
5.3.2	Ensaio 2: Ajuste sigmoidal e modelo de van-Genuchten para curva de retenção	56
5.3.3	Análise da condutividade hidráulica	58
5.3.4	Ensaio 3: Ajuste polinomial e modelo de Brooks e Corey para curva de retenção	60
5.3.5	Ensaio 4: Ajuste sigmoidal e modelo de Brooks e Corey para curva de retenção	62
5.3.6	Estudo de convergência	64
6	Conclusão	66
	Referências Bibliográficas	68
A	Descrições morfológicas dos perfis	75
A.1	PLANOSSOLO HÁPLICO Distrófico arênico - P2	75
A.2	PLANOSSOLO HÁPLICO - P5	79
A.3	PLANOSSOLO HÁPLICO - P7	82
B	Relatório de Atividades Experimentais em Campo	86
B.1	Coleta de dados de umidade	86
B.2	Confecção da curva de calibração	92
C	Exemplo de inserção de dados no <i>software</i> Hydrus 1D	100
D	Código em Octave	109
D.1	Ensaio 1	109
D.1.1	Horizonte A	111
D.1.2	Horizonte E	115
D.2	Ensaio 2	119
D.2.1	Horizonte A	119
D.2.2	Horizonte E	123
D.3	Ensaio 3	128

D.3.1	Horizonte A	129
D.3.2	Horizonte E	132
D.4	Ensaio 4	136
D.4.1	Horizonte A	136
D.4.2	Horizonte E	140

Introdução

A palavra solo, do latim *solum*, quer dizer suporte, superfície, base. Segundo a Sociedade Brasileira de Ciência do Solo, o termo solo refere-se à parte superior da crosta terrestre, mais precisamente à porção superior do material solto que ocorre acima da rocha consolidada (KER, 2015). De forma mais simplificada, (REICHARDT e TIMM, 2004) considera o solo como a camada externa e agricultável da superfície terrestre. Essa camada possui grande importância para especialistas de diversas áreas e cada um deles pode defini-la de acordo com seu ramo de interesse. Por exemplo, para um engenheiro civil, o solo pode ser um material com capacidade de suportar edificações e rodovias. Para o pedólogo, o solo é um corpo tridimensional formado na superfície terrestre por meio da interação de fatores ambientais agindo ao longo do tempo. O solo, como um corpo tridimensional em constante transformação, apresenta elevada variabilidade espacial e temporal de atributos, tais como: porosidade, umidade, teor de matéria orgânica, gases e elementos químicos. Os solos são considerados relativamente resilientes, no entanto, em função da intensidade das formas de atividades humanas, este pode ser bastante degradado, resultando em perda de suas funções.

Na agricultura, o solo é o meio que armazena e fornece água e nutrientes para uma grande diversidade de culturas. Com exceção de algumas culturas específicas, o fornecimento de água e nutrientes se dá na zona não saturada do solo (REICHARDT e TIMM, 2004). Por este motivo, o desenvolvimento de modelos que sejam capazes de descrever o fluxo de água através do solo é importante, por exemplo, na otimização de práticas agrícolas. Outra aplicação deste tema é relacionada à predição do fluxo de poluentes através do solo quando há um derramamento de petróleo, por exemplo.

Historicamente, o engenheiro hidráulico Henry Darcy foi o primeiro a realizar experimentos que possibilitaram o entendimento dos processos do fluxo de água em solos saturados, esses estudos datam de 1856 (DARCY, 1856). As conclusões de Darcy foram importantes, no entanto, o estado de umidade do solo é bastante variável ao longo do tempo e espaço, e a situação mais frequente é quando o solo está insaturado. Por exemplo, na agricultura, com algumas exceções como o cultivo de

arroz alagado, o solo encontra-se insaturado e o conhecimento da dinâmica da água é fundamental para que as culturas apresentem o melhor desempenho. Atribui-se ao físico do solo Edgar Buckingham (BUCKINGHAM, 1907), cujos estudos são datados de 1907, as primeiras tentativas de descrever através de equações matemáticas o fluxo de água em solo não saturado. São contribuições de Buckingham os conceitos de potencial matricial, curvas de retenção, capacidade específica da água e condutividade hidráulica insaturada como uma propriedade distinta de um solo (NIMMO e LANDA, 2005). Posteriormente, os estudos de Lorenzo Richards foram relevantes para consolidação teórica da equação que leva seu nome e descreve o balanço hídrico no solo (RICHARDS, 1931). Esta última equação se destaca até os dias de hoje, sendo a mais reconhecida para descrever a dinâmica da água no solo num determinado tempo e espaço (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013; CELIA *et al.*, 1990; EYMARD *et al.*, 1999; FARTHING e OGDEN, 2017; LAI e OGDEN, 2015; MANZINI e FERRARIS, 2004; PANICONI e PUTTI, 1994; TAKEUCHI *et al.*, 2010; ZARBA, 1988).

A equação desenvolvida por (RICHARDS, 1931) é uma equação diferencial parcial (EDP) parabólica e não linear. Esta última característica decorre da relação existente entre a condutividade hidráulica e o potencial matricial. Em geral, as soluções para a equação de Richards (ER) são obtidas de forma analítica ou numérica. As soluções analíticas frequentemente são determinadas fazendo uso de linearizações de alguns parâmetros da ER. Deve-se destacar que simplificações de parâmetros não lineares em lineares podem acarretar perda de características do problema proposto (PREVEDELLO *et al.*, 2002; SIMUNEK, 2006). Por outro lado, esse tipo de solução é, em geral, usada para avaliar e comparar o desempenho e a precisão de esquemas numéricos (ROSS e PARLANGE, 1994), além de serem importantes ferramentas para adquirir informações sobre a física do fenômeno (MANNICH, 2009).

Ainda como exemplo de aplicações desse modelo, pode-se citar o fornecimento de respostas sobre aptidão do solo, prática relevante pois ajuda a expressar a predisposição das terras para determinado tipo de manejo. Entretanto, a modelagem matemática deste fenômeno e de seus parâmetros é complexa. A determinação e consequente análise das variáveis potencial matricial e umidade é de fundamental importância para problemas envolvendo fluxo de água no solo, pois decorre destas a não linearidade da ER. As funções empíricas de (BROOKS e COREY, 1964) e (VAN GENUCHTEN, 1980), dentre tantas outras, são usadas para descrever de forma empírica esta relação, sendo esta última, e suas modificações, as mais citadas na literatura (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013; CELIA *et al.*, 1990; FARTHING e OGDEN, 2017; QUEIRÓZ, 2017; SIMUNEK *et al.*, 2008), bem como utilizada em softwares como SWRC (SEKI, 2007) e o conceituado *Hydrus*[®] (SIMUNEK *et al.*, 2008).

Tendo em vista a complexa não linearidade da ER, métodos numéricos para solucioná-la têm sido amplamente utilizados. Entre eles estão os métodos de diferenças finitas e elementos finitos. Entre os trabalhos mais citados por fazer uso destes métodos, está o de (CELIA *et al.*, 1990). Para ambos os métodos, esse autor desenvolve equações que fazem a verificação do balanço hídrico, discute a ER em suas três formas, fazendo críticas a cada uma e apresentando a que melhor se comporta numericamente. Contudo, este autor estuda apenas solos homogêneos e predominantemente arenosos, fato este que facilita a convergência computacional em direção aos dados analíticos de laboratório. Além disso, este estudo é citado por outros trabalhos recentes, entre eles (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013; FARTHING e OGDEN, 2017; LAI e OGDEN, 2015; TAKEUCHI *et al.*, 2010; ZAMBRA *et al.*, 2012), apesar de ser datado de 1990.

Outro método numérico utilizado para determinar soluções aproximadas para a ER, e que será usado neste trabalho, é o de volumes finitos. Estudos relevantes sobre este assunto foram feitos por (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013; LAI e OGDEN, 2015; TAKEUCHI *et al.*, 2010). Estes discretizam a equação de Richards através do método de volumes finitos (MVF) e fazem discussões a respeito de estabilidade, eficiência e convergência, além de comparações entre esquemas explícitos e implícitos aplicados às diferentes formas de descrever a equação de Richards.

Entre as ferramentas reconhecidas por descrever e prever o processo de infiltração da água no solo, está o *software Hydrus*[®] desenvolvido por Simunek, van Genuchten e Sejna (SIMUNEK *et al.*, 2008). Tal pacote resolve numericamente a equação de Richards através do método de elementos finitos, simulando o fluxo de água em meios porosos saturados e insaturados. Este *software* também simula fluxos bi e tridimensionais de calor e solutos em diversos meios, a partir de variáveis meteorológicas e características físicas do meio em questão, permitindo estabelecer inúmeras condições de contorno.

Neste contexto, o presente trabalho propõe tratamento clássico da equação de Richards para fluxo de água em solo não saturado, com a solução aproximada dada pelo método de volumes finitos. O desenvolvimento numérico para o fluxo e escoamento vertical da água terá como base o trabalho de (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013). Inicialmente, a validação do modelo numérico será feita através de dados obtidos em (CELIA *et al.*, 1990). Para, em seguida, com determinada calibração, fazer a aplicação do modelo a experimentos de campo e, ainda, fazer a comparação da simulação numérica com a resolução do pacote *Hydrus*[®].

Para estudar os pontos citados, este trabalho subdivide-se em seis capítulos. O primeiro tem o objetivo de fazer uma breve introdução aos conceitos de física do solo, necessários para a familiarização com expressões desta área e que serão usadas ao longo do texto. O capítulo de número dois destina-se a explicar os processos

envolvidos no fenômeno água no solo e os modelos que foram desenvolvidos ao longo do tempo para descrever o fluxo de água no solo, bem como parâmetros e ajustes fundamentais para caracterizar um solo. Em seguida, o capítulo 3 discorre a respeito da construção da equação de Richards e, ao final, apresenta comentários sobre as possíveis condições iniciais e de contorno fundamentais para a resolução do problema de valor de contorno envolvendo a ER. Já no capítulo 4, é apresentado o MVF como método para discretização espacial da ER, além de dois esquemas de discretização temporal para esta equação. O capítulo 5, penúltimo capítulo deste trabalho, discute as variantes de simulações feitas. A princípio são apresentados os testes referentes à verificação do código computacional utilizando esquemas de discretização implícito e explícito no tempo e baseados nos experimentos feitos por (CELIA *et al.*, 1990) e (HAVERKAMP *et al.*, 1977). A segunda parte deste capítulo apresenta quatro testes direcionados ao experimento de campo confeccionado para este trabalho. Nestes ensaios são consideradas duas abordagens para descrever as condições de contorno e inicial, bem como dois modelos para descrever a curva de retenção da água no solo, a saber, os modelos de (VAN GENUCHTEN, 1980) e (BROOKS e COREY, 1964). A terceira parte do capítulo 5 é destinada a discutir a convergência do método numérico proposto. Por fim, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões adquiridas na implementação do modelo numérico estudado.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Esta seção tem a finalidade de apresentar um texto resumido e de fácil compreensão para que os leitores possam se familiarizar com assuntos específicos de física do solo. Não é objetivo deste estudo se aprofundar nessas especificidades, mas expor conceitos básicos tendo em vista a compreensão de nomenclaturas e expressões usadas no decorrer deste trabalho. Para uma leitura mais técnica a respeito deste tema, indica-se as seguintes referências (CAPUTO, 1996; LEPSCH, 2011; LIBARDI, 2005; REICHARDT e TIMM, 2004).

1.1 Conceitos básicos de física do solo

O solo pode ser compreendido como um corpo natural, dinâmico, composto de horizontes e que integra a paisagem (LEPSCH, 2011). Um estudo importante para sua compreensão é a morfologia (do grego *morphos*, forma; *logos*, estudo). Isto significa estudar as características visíveis de um solo em todas as suas partes, tanto externas como internas. De forma mais simplificada, estudar a morfologia do solo é compreender sua anatomia, isto inclui aspectos como cor, estrutura, textura, consistência e classificação de horizontes. Esses estudos, e consequentes classificações, permitem que profissionais da área (como o agrônomo, por exemplo) tirem conclusões sobre atributos físicos e biológicos do solo, além de possibilitarem interpretações relacionadas a seu uso e manejo.

A Pedologia é o ramo da ciência do solo que tem por objeto o estudo das camadas superficiais da crosta terrestre, em particular a sua formação e classificação, levando em conta a ação de fatores do clima (KER, 2015). O profissional desta área se dedica a descrever a aparência do solo em seu ambiente natural, segundo as características visíveis a olho nu ou prontamente perceptíveis ao tato LEPSCH (2011), completando a análise feita em campo com as análises de laboratório.

Uma vez que é impossível escavar o solo como um todo, qualquer estudo de campo deve ser feito em um volume relativamente pequeno de solo, mas que represente

bem o seu todo. A forma usual de realizar esta tarefa é escavando uma trincheira ou barranco (geralmente corte de estradas) onde se avalia uma seção bidimensional, denominada perfil de solo.

A figura (1.1) apresenta uma trincheira aberta em um campo localizado em Seropédica. Nela, pode-se observar um perfil de solo que representa características de um determinado solo em particular. As camadas, aproximadamente paralelas à superfície, que constituem o perfil de solo, e podem ser observadas na figura, são chamadas de horizontes ou camadas. Estes são subpartes do indivíduo solo e podem ser separados pela sua morfologia LEPSCH (2011), segundo as letras O, H, A, E, B, C, F e R. Cada horizonte (ou camada), em função da gênese do solo, pode ser subdividido e ainda receber subscritos e números para diferenciação, segundo sistemas de classificação taxonômica.



Figura 1.1: Planossolo avaliado na atividade de campo.

Nos solos estudados nesse trabalho (Planossolos), considerando as especificidades locais e a profundidade de monitoramento da umidade do solo (0 a 60 cm), do ponto de vista pedológico, encontrou-se basicamente três tipos de horizontes/camada: horizonte A, E e B plânico. Na maior parte dos casos, o monitoramento de umidade se concentrou nos horizontes A e E. Horizonte A, por definição, são horizontes de natureza mineral, superficial e com elevada atividade biológica, enquanto que horizonte ou camada E são horizontes minerais, subsuperficiais e de máxima eluviação

(o material coloidal é translocado para horizontes ou camadas subjacentes). O horizonte B plânico é um horizonte de natureza mineral, subsuperficial com máxima expressão dos processos pedogenéticos, nesse caso específico, o processo de eluviação de argila é marcante (acumulo da argila translocada do horizonte ou camada sobrejacente). A combinação dessa sequência de horizontes/camadas resulta em um solo com marcante estratificação de seções, sobretudo entre os horizontes E e B, gerando um grande gradiente textural (elevação marcante dos teores de argila). Nos dois primeiros horizontes/camada (A e E) a matriz do solo é predominantemente arenosa (teores de areia $\geq 850g$ de areia por kg^{-1} de terra fina seca em estufa (TFSE)). Em sub superfície, quando atinge o horizonte B plânico, a textura passa para a classe textural média a argilosa, dependendo das condições específicas de cada perfil de solo. Maiores detalhes sobre as características morfológicas, físicas e químicas dos três planossolos estudados podem ser encontrados no Apêndice A desse documento.

Cada um dos materiais citados possuem partículas de diferentes tamanhos e que se organizam de diferentes formas. Por exemplo, os solos com maior concentração de areia são formados por partículas maiores e, os mais argilosos, por partículas menores. Este arranjo de partículas do solo resulta em poros, que são os espaços vazios entre as partículas sólidas. Estes espaços, na verdade, nunca estão vazios, podendo estar ocupados por ar ou água. Dessa forma, define-se solo saturado como aquele em todos os seus poros estão preenchidos por água. Enquanto um solo úmido (insaturado) é aquele que possui parte dos poros ocupado por água e, uma outra parte, ocupado por ar.

A umidade volumétrica é uma medida que expressa a presença da água no solo, em relação ao volume do solo, geralmente é denotada por θ , e definida como uma função

$$\theta : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta = \frac{V_a(\vec{d}, t)}{V_T(\vec{d})} = \left[\frac{cm^3}{cm^3} \right] \quad (1.1)$$

em que V_a representa o volume ocupado pela água e V_T é o volume total da amostra. O conteúdo de água no solo também pode ser expresso em função da massa, isto é, considerando a relação entre a massa de água (m_a) presente no solo em um determinado instante e a massa de solo (m_s)

$$\theta_g = \frac{m_a}{m_s} = \left[\frac{kg}{kg} \right]. \quad (1.2)$$

Dessa forma, θ é adimensional, representando, em termos práticos, um volume (ou massa) de água em um volume (ou massa) de solo, ou seja, um percentual. Este valor pode variar entre a umidade residual, θ_r (conteúdo de água retido numa amostra de solo muito seca) e a umidade de saturação θ_s (LIBARDI, 2005), esta última pode ser expressa em termos de porosidade do solo, índice que quantifica a fração do volume do solo ocupada pelos poros (espaço do solo que pode ser ocupado por ar ou água). Assim, se o valor de porosidade for total, ou seja, se os poros estiverem totalmente ocupados por água a umidade do solo será θ_s . Dessa forma a umidade do solo pode variar entre 0 (zero) e a porosidade total do solo (20% até 80%).

Capítulo 2

O Fenômeno Água no Solo

Ao infiltrar no solo, a água se movimenta de um ponto de maior energia para um outro de menor energia. Esta energia pode ser subdividida em duas formas distintas, são elas cinética e potencial. Neste estudo, a primeira pode ser desprezada, pois é vinculada à velocidade de percolação da água no solo e esta é muito baixa (LIBARDI, 2005; REICHARDT e TIMM, 2004). Já a diferença de energia potencial (gradiente hidráulico), desempenha um papel fundamental na dinâmica da água no solo, pois ela é a força motiz do fluxo de água no solo (KLAR, 1988; LEPSCH, 2011).

2.1 Potencial Hidráulico

Na modelagem de fenômenos é fundamental o entendimento das variáveis envolvidas. A partir deste entendimento algumas variáveis podem ser desconsideradas. Na discussão a seguir são apresentados alguns aspectos, que não configuram um texto completo no tópico aqui desenvolvido, para um suporte e embasamento melhor existe uma literatura clássica (LIBARDI, 2005; REICHARDT e TIMM, 2004).

Comumente representada por ψ , a energia potencial da água é função de várias variáveis que representam as forças que nela atuam. São estas: o potencial térmico, ψ_T ; o potencial de pressão (piezométrico), ψ_P ; o potencial osmótico, ψ_{os} ; o potencial gravitacional, ψ_g e o potencial matricial, ψ_m . Tem-se, então,

$$\psi = \psi_T + \psi_P + \psi_{os} + \psi_g + \psi_m. \quad (2.1)$$

Segundo especialistas no assunto (LEPSCH, 2011; LIBARDI, 2005; REICHARDT e TIMM, 2004), a temperatura tem uma influência complicada no potencial da água no solo. Além disso, (TAYLOR, 1972) afirma que quando se considera ψ_T no cálculo do potencial total, muitas equações fornecem resultados quantitativos incorretos. Como decorrência desses fatores, o potencial térmico é, em geral, desprezível. Assim, uma das primeiras suposições feitas é que a influência da temperatura sobre o

fenômeno pode ser desconsiderada, ou seja, o sistema em questão é isotérmico (ou aproximadamente isotérmico) e tem-se $\psi_T = 0$.

O potencial osmótico, função do número de mols de água no sistema, possui relação direta com a presença de membrana semipermeável. Esse potencial é relevante apenas quando fala-se em fluxo de água do solo para a planta e na transição da água de fase líquida para gasosa e vice versa (pressão de vapor). Como o presente trabalho não leva em consideração a influência de plantas no fenômeno estudado, o potencial osmótico pode ser desconsiderado, isto é, $\psi_{os} = 0$.

O potencial piezométrico será levado em consideração apenas em condições de solo saturado. Considerando-se variáveis espaciais para a localização de um ponto P no solo, quando este está saturado há uma coluna d'água atuando sobre cada ponto P observado. Assim, por exemplo, em um arrozal inundado, o potencial de pressão não pode ser desprezado. Neste trabalho considera-se apenas solos não saturados, dessa forma, mais uma simplificação a ser feita é que $\psi_P = 0$, ou seja, o potencial de pressão é nulo.

Feitas essas simplificações, restam apenas os potenciais matricial e gravitacional. O potencial matricial, função da umidade do solo θ , é resultado das interações entre a matriz do solo e a água retida nele. As forças capilares e de adsorção estão relacionadas a ψ_m , uma vez que este potencial atua com a energia despendida na remoção da água retida nos poros e partículas do solo. Tanto maior é a energia despendida quando menor for o conteúdo de água no solo.

Já o potencial gravitacional, função da altura z , é produto da força da gravidade atuando no movimento vertical da água. Este potencial sempre estará presente devido ao campo gravitacional terrestre que tende a puxar a água para baixo (na direção do centro da Terra). Decorrem disto os processos de infiltração da água no solo e o reabastecimento dos lençóis freáticos.

Feitas as devidas simplificações, o potencial total da água será tomado por

$$\psi = \psi_g + \psi_m. \quad (2.2)$$

2.2 Carga Hidráulica

Segundo (DELANDA, 2013), propriedades extensivas incluem não apenas propriedades métricas, tais quais comprimento, área e volume, mas quantidades de energia ou entropia. São definidas por serem intrinsecamente divisíveis, por exemplo, a divisão de um dado volume de matéria em duas partes idênticas, resulta em dois volumes, cada um com metade da extensão do volume original. Isto é, grandezas extensivas são aquelas que dependem da extensão do sistema avaliado. Propriedades intensivas, por outro lado, seriam como temperatura e pressão, que não podem ser

divididas como explicado anteriormente. Para exemplificar este conceito, considere um volume de água a 90 graus de temperatura. Dividindo-se este volume em duas partes iguais, não seriam obtidos dois volumes a 45 graus cada. Ambos apresentarão a mesma temperatura original.

Por serem definidas como quantidade de energia, as componentes gravitacional e matricial do potencial total são grandezas extensivas. Porém, de acordo com (REICHARDT e TIMM, 2004), a maioria dos autores prefere trabalhar com grandezas intensivas, pelo fato de que esta independe da extensão do sistema, neste caso, o fluxo de água no solo.

A fim de trabalhar com grandezas que possuem propriedades intensivas, pode-se expressar o potencial total de três formas distintas: energia por unidade de massa, energia por unidade de volume e energia por unidade de peso, isto é,

$$\frac{Energia}{Massa} = \frac{Mgz}{M} = \left[\frac{kg \left(\frac{m}{s^2} \right) m}{kg} \right] = \left[\frac{Nm}{kg} \right] = \left[\frac{J}{kg} \right], \quad (2.3)$$

$$\frac{Energia}{Volume} = \frac{Mgz}{V} = \left[\frac{kg \left(\frac{m}{s^2} \right) m}{m^3} \right] = \left[\frac{Nm}{m^3} \right] = \left[\frac{N}{m^2} \right] = [Pa], \quad (2.4)$$

$$\frac{Energia}{Peso} = \frac{Mgz}{Mg} = z = [m], \quad (2.5)$$

sendo esta última forma a mais utilizada na literatura (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013; LAI e OGDEN, 2015; REICHARDT e TIMM, 2004).

Quando o potencial total da água é expresso como energia por unidade de peso, a grandeza resultante recebe o nome de carga hidráulica total da água, representada por h e expressa em termos de coluna (altura) de água. As unidades usualmente usadas para expressar essa componente são kPa , cm de água, m de água, cm de Hg e mm de Hg (LIBARDI, 2005). Deste modo,

$$h = \frac{\psi}{Mg} = \frac{\psi_g}{Mg} + \frac{\psi_m}{Mg} = h_g + h_m. \quad (2.6)$$

Além disso, tendo em vista que o potencial gravitacional é dado por Mgz , em que M , g e z representam a massa, a força gravitacional e a altura, respectivamente, então a componente gravitacional do potencial total será expressa da seguinte forma

$$h_g = \frac{\psi_g}{Mg} = \frac{Mgz}{Mg} = z, \quad (2.7)$$

para variações infinitesimais, tem-se

$$dh_g = dz. \quad (2.8)$$

2.3 Modelos para Fluxo de Água no Solo

2.3.1 Lei de Darcy

Em 1856, o engenheiro hidráulico Henry Darcy estudou o fluxo estacionário de água em solo saturado, formulando, assim, a lei que recebeu seu nome (DARCY, 1856). Esta lei, resumida em uma equação, diz que a densidade de fluxo de água que passa por uma determinada área de solo saturado, é diretamente proporcional ao gradiente de potencial hidráulico no solo. Este gradiente de potencial hidráulico é, na prática, a força que atua sobre a água provocando o movimento desta através do solo. Além disso, a densidade de fluxo hidráulico é uma grandeza que expressa o volume de água Q que atravessa, por unidade de tempo, uma seção transversal (área) de solo A perpendicular ao movimento.

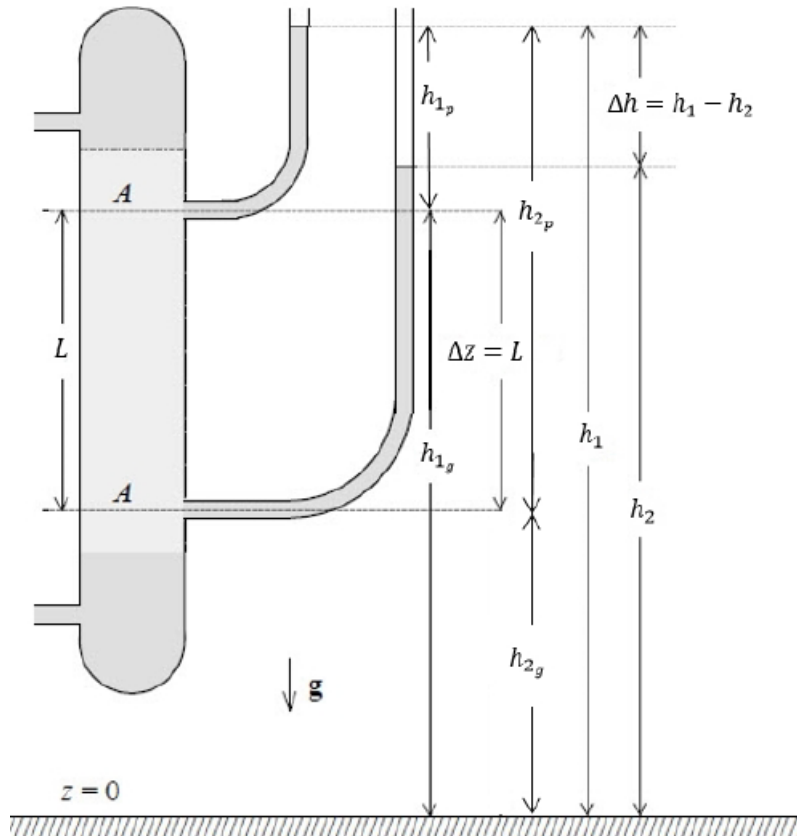


Figura 2.1: Diagrama ilustrando o experimento realizado por Darcy

O experimento de Darcy consistiu em colocar água em uma coluna de solo de

comprimento L dentro de um reservatório, como mostrado na figura (2.1). Seja $\Delta h = h_1 - h_2$ o gradiente de potencial, ou seja, a diferença de carga hidráulica que provoca o fluxo, A a área referente à seção transversal da amostra de solo em condições de saturação e K_{sat} a constante de proporcionalidade que recebe o nome de condutividade hidráulica de saturação. A Lei de Darcy é dada por:

$$Q = -K_{sat}A \frac{\Delta h}{L}. \quad (2.9)$$

em que Q é a vazão (volume V de água fluindo por unidade de tempo t) e o sinal negativo da equação indica que o sentido do fluxo é inverso ao do gradiente Δh .

Em termos de unidades, tem-se

$$Q = \left[\frac{cm^3}{s} \right] = K_{sat}A \frac{\Delta h}{L} = K_{sat} \left[\frac{cm^2 \cdot cm}{cm} \right], \quad (2.10)$$

assim, a unidade da constante K_{sat} é $[cm/s]$.

Quando $L = \Delta z \rightarrow 0$, ou seja, fazendo a coluna de solo tão pequena quanto puder, reescreve-se a Lei de Darcy como:

$$Q = -K_{sat}A \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (2.11)$$

Para medir o volume de água Q que atravessa, por unidade de tempo, uma área de seção transversal de solo A , pode-se reescrever a Lei de Darcy em termos de densidade de fluxo, grandeza denotada por q .

$$q = \frac{Q}{A} = -K_{sat} \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.12)$$

Na prática, equação (2.12) pode ser vista como se o solo fosse repartido em finas membranas e o fluxo fosse calculado em cada uma dessas membranas.

A respeito da lei de Darcy é importante fazer algumas observações. O comprimento de solo $L = \Delta z$ é inversamente proporcional ao fluxo na Lei de Darcy. Esse fato pode ser explicado observando que quanto maior o comprimento de solo, menor será o fluxo de água, ou seja, mais dificuldade a água enfrenta para atravessar o solo. Além disso, o sinal negativo na equação (2.9) indica que o sentido da densidade de fluxo é inverso ao do gradiente, ou seja, a água se move de um ponto com maior carga h_1 para outro de menor carga h_2 .

2.3.2 Equação de Darcy-Buckingham

Os trabalhos de Edgar Buckingham (BUCKINGHAM, 1907), datados de 1907, são uma versão mais geral da Lei de Darcy, visto que esta modela apenas o fluxo

de água em solos saturados. Entretanto, a condição mais comum, e de interesse, é aquela onde o solo não está saturado, visto que a maioria das culturas se dá sobre este tipo de solo. Foi contribuição de (BUCKINGHAM, 1907) observar que o potencial matricial e a condutividade hidráulica são funções da umidade, θ , do solo (NIMMO e LANDA, 2005). A inserção deste conceito produz uma generalização da equação (2.9) que recebe o nome de Darcy-Buckingham e descreve o fluxo de água da seguinte forma:

$$q = -K(\theta) \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial z}, \quad (2.13)$$

nesta equação, $\frac{\partial \psi(\theta)}{\partial z}$ representa o gradiente de potencial hidráulico e $\psi = \psi(\theta)$ é o potencial total da água, apresentado na equação (2.2). E ainda, como ψ pode ser escrito em termos de carga h , tem-se que $h = h(\theta)$.

Observe que, no potencial total, considera-se $\psi_p = 0$, pois o solo em questão não está saturado, e $\psi_o = 0$, pois leva-se em consideração condições de solo sem membrana semipermeável, por exemplo. Dessa forma, tem-se

$$\psi(\theta) = \psi_g + \psi_m(\theta). \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.13),

$$q = -K(\theta) \frac{\partial [\psi_g + \psi_m(\theta)]}{\partial z} \quad (2.15)$$

$$= -K(\theta) \left[\frac{\partial \psi_g}{\partial z} + \frac{\partial \psi_m(\theta)}{\partial z} \right]. \quad (2.16)$$

A respeito da equação (2.16), é relevante observar que a condutividade hidráulica é uma propriedade do solo que depende do arranjo geométrico das partículas e da umidade presente no solo (REICHARDT, 1985). Vale ainda ressaltar que a condutividade quantifica a facilidade (ou dificuldade) com que a água atravessa o meio (solo). Ela decresce rapidamente com o decréscimo da umidade, ou potencial matricial h , pois como $h = h(\theta)$ implica que $K = K(\theta)$.

2.3.3 Curva de retenção da água no solo

A curva característica do solo (ou curva de retenção da água no solo) é um recurso muito utilizado para descrever as relações entre a quantidade de água retida pelo solo e a energia com que ela é retida (LEPSCH, 2011). Em termos técnicos, esta curva ilustra a relação entre o teor de umidade do solo (θ) e o potencial da água no solo (h), ou seja, representam a relação $\theta = \theta(h)$, descrita anteriormente. Ou

ainda, como h também é função de θ , a curva de retenção também pode representar $h = h(\theta)$.

Características físicas do solo como, por exemplo, textura, estrutura, arranjo poroso e distribuição dos poros segundo seu diâmetro médio afetam a forma da curva de retenção (REICHARDT, 1985, 1987). Assim, dados dois solos com composições distintas, eles terão curvas de retenção também distintas.

Na figura (2.2) são apresentadas três curvas características de horizontes distintos contidos em um mesmo perfil de solo. O horizonte A é o mais superficial e contém maior quantidade de matéria orgânica e areia. O horizonte E é essencialmente composto por areia. Já o horizonte B é formado basicamente por argila.

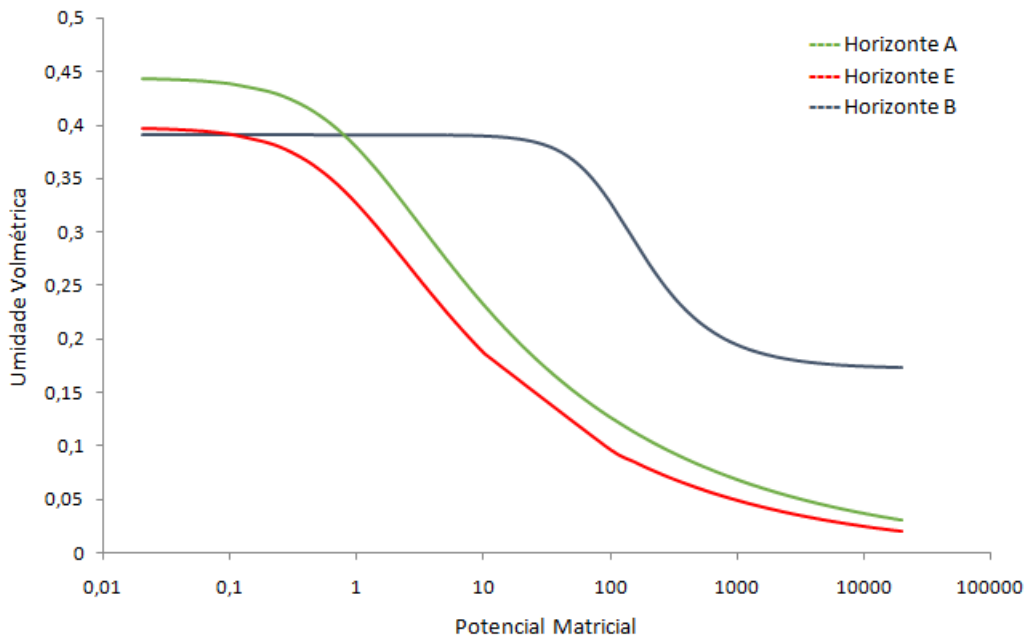


Figura 2.2: Exemplos de curvas de retenção

Observe que quando os solos estão próximos da saturação ($\theta = \theta_s$), é relativamente fácil remover o excesso de água existente, pois os valores de potencial matricial são pequenos ($\psi_m \simeq 0$), ou seja, a força que prende a água no solo é pequena e fácil de ser superada. À medida que a umidade do solo vai diminuindo ($\theta \simeq 0$), torna-se mais difícil o movimento e a remoção da água retida nele. Esse fenômeno é explicado pelas altas tensões pelas quais a água fica retida no solo ($\psi_m = 15\text{atm}$ ou 15000 cm). Daí pode-se ver que para um intervalo pequeno de variação de umidade (no gráfico da figura (2.2), de 0 a 45%, aproximadamente), o potencial matricial tem um enorme intervalo de variação (0 a 15000 cm).

Vale ainda ressaltar que os horizontes que apresentam em sua composição maior quantidade de areia perdem água com maior facilidade, uma vez que existem poucos agregados e o arranjo das partículas de areia conferem maior espaçamento

(macroporos) favorecendo, assim, a passagem de água. Em solos com predomínio de argila, a água se movimenta mais lentamente, pois os poros são de menor raio, mais tortuosos e, em situação de baixa umidade, a água fica retida com maior intensidade na superfície dos coloides (adsorção). No caso do horizonte B (solo mais argiloso), a água tem mais dificuldade de deslocar-se e as forças de retenção neste caso são muito maiores do que nos horizontes A e E.

Outra informação que pode ser obtida pela análise da curva de retenção é a umidade mínima (residual) que um determinado tipo de solo pode atingir. Este parâmetro é denotado por θ_r . Nos solos exemplificados pela figura (2.2) as umidades residuais dos horizontes A e E são bem menores do que a do horizonte B. Uma das formas de justificar este fato é através da superfície específica desses materiais. Horizontes com mais coloides minerais, como o B, apresentam maior superfície específica do que os horizontes A e E, mais arenosos. Maior superfície específica implica maior capacidade de retenção de umidade, pelo fenômeno de adsorção. Portanto, na faixa de umidade residual, a porosidade tem pouco (ou nenhum) efeito na retenção de água e a presença de coloides explica as diferenças na umidade residual.

Em geral, essas curvas características são determinadas em laboratório, com amostras deformadas e fazendo uso do método da membrana (ou placa) de pressão. Este equipamento, desenvolvido por Richards (RICHARDS, 1949), está esquematizado na figura (2.3).

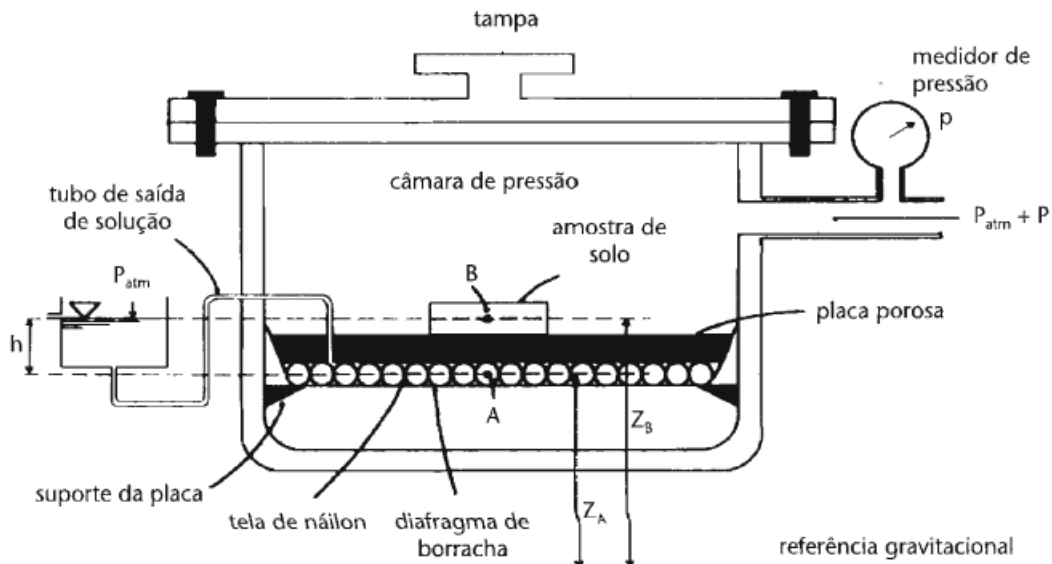


Figura 2.3: Esquema de uma placa de pressão. Fonte REICHARDT e TIMM (2004).

Em síntese, amostras de solo saturado são colocadas dentro do aparelho e são aplicadas pressões que variam de 0 a 15000cm de H_2O . Em virtude da pressão aplicada, a água é retirada da amostra de solo até que se estabeleça o equilíbrio e, dessa forma, o solo terá um teor de água θ retido a um potencial matricial ψ_m . O

processo é repetido para vários valores de ψ_m necessários para obter uma boa curva de retenção. Como o foco principal deste texto não é descrever detalhadamente os equipamentos usados para determinar a curva de retenção, indica-se, para mais informações, as seguintes referências (KLAR, 1988; LIBARDI, 2005; REICHARDT, 1985; REICHARDT e TIMM, 2004).

2.4 Modelos para a curva de retenção

Diversos modelos empíricos foram desenvolvidos para estabelecer uma relação entre a umidade θ e o potencial matricial ψ e entre esses dois e a condutividade hidráulica K . Estes métodos estabelecem equações que têm por objetivo ajustar, da melhor maneira possível, equações para a curva de retenção da água no solo, $\theta = \theta(h)$ e para a condutividade $K = K(\theta)$, ou ainda, $K = K(h)$.

2.4.1 O modelo de Brooks e Corey

Um dos modelos que representa a curva característica de forma mais simplificada é o modelo de (BROOKS e COREY, 1964). De acordo com estes autores, a relação entre θ e h pode ser expressa por

$$S_e = \begin{cases} \left(\frac{h}{h_b}\right)^{-\lambda}, & \text{se } h > h_b \\ 1, & \text{se } h \leq h_b \end{cases} \quad (2.17)$$

em que

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}, \quad (2.18)$$

representa a saturação efetiva do solo, ou seja, a quantidade real de água contida no solo.

As constantes h_b e λ são determinadas por ajuste a partir de dados da curva característica do solo obtidos em laboratório. Estes ajustes podem ser feitos por *softwares* como o SWRC (SEKI, 2007) e RETC (VAN GENUCHTEN *et al.*, 1991). Os parâmetros também podem ser determinados graficamente, pois, segundo (BROOKS e COREY, 1964; SANTOS BRANDÃO *et al.*, 2004), o valor de λ corresponde à declividade da equação da reta correspondente à relação $S_e \times h$ na escala $\log - \log$. Já o valor de h_b , é dado pela interseção do prolongamento da reta anteriormente citada até $S_e = 1, 0$.

O modelo abordado nesta sessão é utilizado em *softwares* conceituados como SWRC (SEKI, 2007) e HYDRUS (SIMUNEK *et al.*, 1998) e possui citações em livros

(SANTOS BRANDÃO *et al.*, 2004) e artigos (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013; LAI e OGDEN, 2015).

Tendo em vista determinar uma expressão para descrever a condutividade hidráulica, alguns modelos foram elaborados tendo como base métodos estatísticos. A partir deste modelo, a equação para condutividade hidráulica foi obtida segundo o modelo de (MUALEM, 1976) e assume a seguinte forma

$$K(h) = K_s \left[\frac{h_b}{h} \right]^{2+2,5\lambda} \quad (2.19)$$

ou ainda, em termos de umidade, esta mesma equação pode ser reescrita como

$$K(\theta) = K_s S_e^{\frac{2}{\lambda}+2,5} \quad (2.20)$$

com S_e definido como descrito em (2.18).

2.4.2 O modelo de Haverkamp

O modelo de (HAVERKAMP *et al.*, 1977) é um dos modelos usados por (CELIA *et al.*, 1990) e descreve a curva de retenção da seguinte forma

$$\theta(h) = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |h|^\beta} + \theta_r, \quad (2.21)$$

sendo α e $\beta \geq 0$ parâmetros de ajuste.

Para este modelo, a condutividade hidráulica é descrita, de acordo com (CELIA *et al.*, 1990; HAVERKAMP *et al.*, 1977), da seguinte forma

$$K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^\gamma}, \quad (2.22)$$

com A e γ obtidos por ajuste.

2.4.3 O modelo de van Genuchten

O trabalho de (VAN GENUCHTEN, 1980) possui grande relevância no âmbito de citações em livros como (LIBARDI, 2005; REICHARDT e TIMM, 2004), em artigos (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013; CELIA *et al.*, 1990; LAI e OGDEN, 2015; OGDEN *et al.*, 2017; TAKEUCHI *et al.*, 2010) e usado em *softwares* como HYDRUS® (SIMUNEK *et al.*, 1998) e SWRC (SEKI, 2007).

A equação de van Genuchten é dada por

$$\theta(h) = \begin{cases} \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (\alpha|h|)^n]^m} + \theta_r & \text{se } h \leq 0 \\ \theta_s & \text{se } h > 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

em que os parâmetros α e $n \geq 1$ são obtidos por ajuste e $m = 1 - (1/n)$, segundo (VAN GENUCHTEN, 1980).

Reescrevendo esta equação como

$$\theta(h) - \theta_r = \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (\alpha|h|)^n]^m} \quad (2.24)$$

e fazendo o limite quando $h \rightarrow \infty$, tem-se

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (\alpha|h|)^n]^m} = 0. \quad (2.25)$$

Isto mostra que, haverá uma umidade residual θ_r , mesmo que o potencial matricial considerado seja muito grande. Assim, para um modelo ideal, θ_r deveria alcançar o valor mínimo, ou seja, $\theta_r = 0$. Contudo, na prática, isso não acontece, pois o solo continua retendo uma pequena porção de água, mesmo que muito pequena (REICHARDT, 1985). Fato este, bem retratado pelo modelo de (VAN GENUCHTEN, 1980).

Para a condição contrária, ou seja, para solos saturados, $h = 0$ e, segue da equação (2.23)

$$\theta(h) = \theta_s, \quad (2.26)$$

como esperado.

Neste caso, a maneira mais usada para expressar a condutividade hidráulica é a equação obtida através do modelo estatístico de (MUALEM, 1976). A partir deste modelo, (VAN GENUCHTEN, 1980) utilizou a equação que leva seu nome e que relaciona θ e h para obter a seguinte expressão para $K(\theta)$

$$K(\theta) = K_s S_e^{1/2} \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^m \right]^2. \quad (2.27)$$

Além dos três modelos citados anteriormente, outros foram desenvolvidos com o intuito de descrever a curva de retenção da água no solo. Entre eles pode-se citar os modelos de (CAMPBELL, 1974), (DURNER, 1994), (KOSUGI, 1996), (POULSEN *et al.*, 2002) e as modificações do modelo de van Genuchten desenvolvidas por (VOGEL e CISRELOVA, 1988) e uma outra modificação desenvolvida por (VOGEL *et al.*, 2000).

Capítulo 3

Modelo Matemático

Ambas as equações estudadas na seção (2.3) consideram apenas o fluxo como sendo estacionário. Neste caso, as características do fluxo não variam com o passar do tempo. Diferentemente das equações de Darcy e Darcy-Buckingham, a equação de Richards leva em consideração o tempo que a água leva para infiltrar o solo. Para modelar este fato, é necessário fazer uso da equação da continuidade (REICHARDT e TIMM, 2004), que relaciona a umidade, o tempo e a densidade de fluxo que passa por um elemento de volume. Matematicamente, a equação da continuidade estabelece que não pode haver criação nem destruição de massa, sendo ela a equação de conservação de massa (LIBARDI, 2005). No caso deste trabalho, a propriedade conservada na equação da continuidade será o volume de água no sistema considerado.

3.1 Equação da Continuidade

Considere um volume elementar de solo, como mostrado na figura (3.2). Além disso, considere $q = q(z, t)$ a densidade de fluxo no tempo t e na posição z , o balanço será dado por:

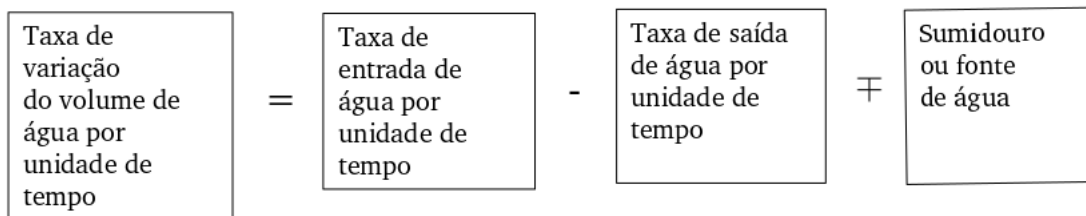


Figura 3.1: Esquema de balanço de massa

Sejam $\theta = \theta(z, t)$ a umidade, cuja unidade é $[cm^3.cm^{-3}]$, e $\sigma = \sigma(z, t)$ uma fonte (ou sumidouro) de água, ambos num tempo t e na posição z . Considerando, no

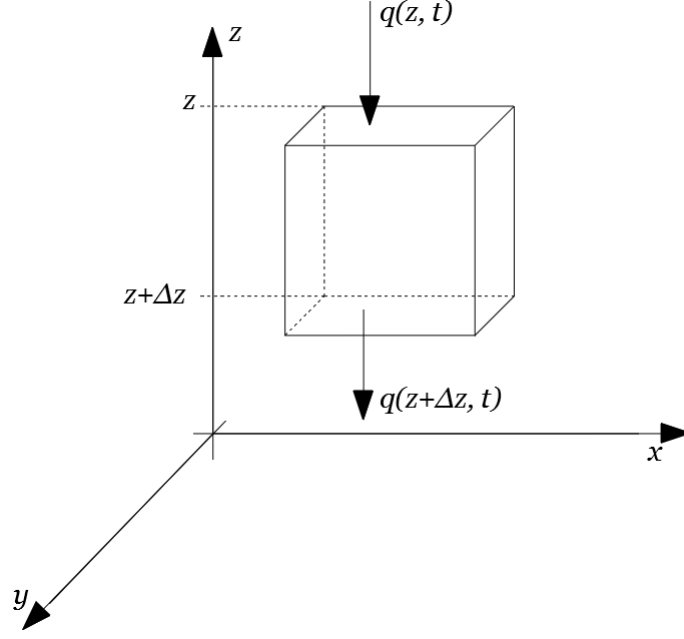


Figura 3.2: Elemento de volume de solo

elemento de volume de solo, a seção transversal de área A , seu volume é dado por $A\Delta z$ e o volume de água neste elemento de volume poderá ser expresso por $\theta A\Delta z$. Dessa forma, a lei de conservação é traduzida por:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\theta(z, t)A\Delta z] = q(z, t)A - q(z + \Delta z, t)A \mp \sigma(z, t)A\Delta z, \quad (3.1)$$

como $A\Delta z$ não é função do tempo, tem-se

$$A\Delta z \frac{\partial}{\partial t}[\theta(z, t)] = q(z, t)A - q(z + \Delta z, t)A \mp \sigma(z, t)A\Delta z, \quad (3.2)$$

dividindo ambos os lados por $A\Delta z$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\theta(z, t)] = \frac{q(z, t) - q(z + \Delta z, t)}{\Delta z} \mp \sigma(z, t). \quad (3.3)$$

Da definição de derivada por limite, tem-se que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{q(z + \Delta z, t) - q(z, t)}{\Delta z} = \frac{\partial q}{\partial z}(z, t). \quad (3.4)$$

Assim, fazendo $\Delta z \rightarrow 0$ em (3.3), para informar o fluxo pontual no elemento de volume, e então:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\theta(z, t)] = -\frac{\partial q}{\partial z}(z, t) \mp \sigma(z, t). \quad (3.5)$$

Como o objetivo deste trabalho é estudar o fluxo unidimensional, o raciocínio feito aqui levou em conta apenas o eixo cartesiano z . Para tratar o fluxo tridimensional seria aplicada a mesma teoria apresentada aqui, porém somando a (3.3) os fluxos nos eixos x e y . Estes cálculos são apresentados em (EDELSTEIN-KESHET, 2005; LIBARDI, 2005).

Na ausência de sumidouros e fontes, como, por exemplo, plantas, chuvas, irrigação e lençóis freáticos, respectivamente, a equação (3.5) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(z, t) = -\frac{\partial q}{\partial z}(z, t). \quad (3.6)$$

3.2 Equação de Richards

A equação da continuidade (3.6) não leva em conta, neste formato, o fluxo de água em solo não saturado e informações referentes à física do solo. Essas informações serão adicionadas ao fazer a respectiva substituição da equação de Buckingham (2.16) em (3.6). Dessa forma, obtém-se a seguinte expressão

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \left(\frac{\partial \psi_g}{\partial z} + \frac{\partial \psi_m(\theta)}{\partial z} \right) \right].$$

chamada de equação de Richards para fluxo unidimensional de água no solo. Como a condutividade é uma função da própria umidade, solução da equação, e tal função não será considerada constante, então a expressão de $K(\theta)$ faz com que a EDP seja não linear. A fim de trabalhar com grandezas intensivas, considera-se o potencial total (ψ) escrito em termos de energia por unidade de peso (h), isto é, carga hidráulica ao invés do potencial hidráulico. Deste modo, utilizando a igualdade (2.8), pode-se escrever

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \left(1 + \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right]. \quad (3.7)$$

A forma da equação de Richards (3.7) é, frequentemente, chamada de forma mista (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013; CELIA *et al.*, 1990).

Como $\theta = \theta(h)$ e $h = h(z, t)$, então a regra da cadeia gera

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Considerando $C(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h}$, conhecida por capacidade hídrica, então a equação de Richards ganha a forma

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \left(1 + \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right] \quad (3.9)$$

conhecida por forma h .

Uma vez que $h(z, t)$ também é função de θ , pode-se escrever a seguinte igualdade

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (3.10)$$

que, substituída em (3.7), obtém-se

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) + K(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) + D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right], \quad (3.12)$$

em que $D(\theta) = K(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta}$ representa a difusividade da água no solo. A equação (3.12) é denominada forma θ da equação de Richards.

De acordo com (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013; LAI e OGDEN, 2015), fazendo uso da forma θ não é possível calcular o fluxo em condições de saturação, fornecendo, em alguns casos, soluções descontínuas. Ainda segundo estes autores, a forma h da Equação de Richards produz soluções contínuas em transições de regime insaturado para saturado, porém não é conservadora em massa devido à natureza altamente não linear da capacidade hídrica. Já a forma mista une propriedades vantajosas das formas h e θ , permitindo assim fluxo, conservação e continuidade de forma variável e saturada. Dessa forma, este trabalho fará uso da formas mista da Equação de Richards.

3.3 Condições Adicionais

O fenômeno água no solo é descrito através de uma equação diferencial parcial dependente do tempo e do espaço. Configura-se, portanto, um fenômeno transiente modelado por uma equação em que aparecem as derivadas da função incógnita (θ) em relação ao tempo e ao espaço. Encontrar solução para esta equação é encontrar funções cujas derivadas a satisfaçam.

A solução geral de uma EDP sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ engloba todas as soluções (funções) válidas sobre este conjunto. Por outro lado, uma solução particular de uma EDP é uma função específica em Ω que satisfaz à EDP sob condições que são complementares ao problema. Para o caso considerado (regime transiente) as condições adicionais que precisam ser especificadas são conhecidas como condições iniciais e de fronteira (IÓRIO, 2016).

O presente trabalho estuda o fluxo unidimensional de água em solo não saturado. Por isso, o domínio de interesse $\Omega = (0, L) \times (0, T)$ representa o perfil de solo de

profundidade L e o intervalo de tempo considerado. Na fronteira espacial estarão os pontos (z, t) em que $z = 0$ ou $z = L$ representam, respectivamente, a parte superior e parte inferior do perfil de solo.

De forma prática, para a equação (3.7), a condição inicial é usada para especificar o potencial matricial (h) ao longo de todo o domínio Ω no instante em que o modelo de simulação inicia, isto é, num dado tempo inicial t_0 . Matematicamente, pode-se escrever essa condição como $h(z, 0) = h_0(z)$, para todo $z \in [0, L]$, ou seja, ao longo do eixo vertical. De forma análoga, outra possível condição inicial é dada se a umidade (θ) é conhecida no tempo inicial em todo o intervalo $[0, L]$, isto é $\theta(z, 0) = \theta_0(z)$, $\forall z \in [0, L]$.

Outro tipo de condição complementar ao problema (3.7) são as condições de fronteira (ou de contorno). Estas equivalem a conhecer a variável dependente (umidade ou potencial matricial) ou o fluxo no bordo do domínio espacial durante todo o intervalo de tempo. Dessa forma, as condições de contorno podem ser expressas, em termos de potencial matricial, por $h(0, t) = h_1(t)$ e $h(L, t) = h_2(t)$, ou de umidade $\theta(0, t) = \theta_1(t)$ e $\theta(L, t) = \theta_2(t)$, na superfície ($z = 0$) e no fundo ($z = L$) do perfil considerado.

As condições de contorno, escritas em função do potencial matricial, para a equação de Richards possuem muitas vezes a seguinte estrutura

$$\alpha_z h(z, t) + \beta_z \frac{\partial h}{\partial z}(z, t) = f_z(t), \quad (3.13)$$

para $z = 0$ ou $z = L$, com α_z e β_z constantes conhecidas, satisfazendo $\alpha_z^2 + \beta_z^2 \neq 0$, f_z uma função que varia com o tempo. Para o caso $\beta_z = 0$, a condição (3.13) é conhecida como condição de Dirichlet. Por outro lado, quando $\alpha_z = 0$, (3.13) é dita condição de Neumann. Sempre que α_z e β_z são simultaneamente não nulos, essas condições são ditas de Robin (IÓRIO, 2016). De forma análoga, as condições de contorno serão escritas, em função da umidade (θ), como

$$\alpha_z \theta(z, t) + \beta_z \frac{\partial \theta}{\partial z}(z, t) = g_z(t). \quad (3.14)$$

A parte superior do solo está constantemente exposta a condições climáticas (chuva e sol, por exemplo) que viabilizam o fluxo de água em dois sentidos principais: para cima, devido à evaporação, e para baixo, devido à drenagem. O presente estudo considera apenas este último processo. Além disso, pode-se admitir o empoçamento de água, quando, por exemplo, a precipitação (ou irrigação) é maior do que a taxa infiltração de água no solo. Nessas condições, forma-se uma altura de água acima da superfície do solo e conseqüente presença de uma carga hidráulica na região. Na presença deste acúmulo de lâmina d'água, o potencial mátrico é igual à altura desta

lâmina. Este cenário é descrito por condições de contorno de Dirichlet da seguinte forma

$$h(0, t) = h_1(t), \quad t \geq 0, \quad (3.15)$$

ou ainda

$$\theta(0, t) = \theta_1(t), \quad t \geq 0. \quad (3.16)$$

Um outro possível cenário, seria supor que o potencial ou a umidade sejam conhecidos na parte inferior do perfil de solo. Isto corresponde a prescrever uma dessas grandezas em $z = L$. Neste caso, a água entraria apenas pelo topo da coluna de solo, infiltrando as camadas inferiores até que o todo o perfil estivesse saturado. Esta situação também pode ser descrita por uma condição de Dirichlet como ou ainda

$$h(L, t) = h_2(t), \quad t \geq 0 \quad (3.17)$$

ou ainda

$$\theta(L, t) = \theta_2(t), \quad t \geq 0. \quad (3.18)$$

Ao retratar a dispersão da chuva ou a irrigação feita por jatos de água, sem empoçamento em ambos os casos, presume-se que a água infiltra por toda a extensão do perfil de solo. Pode-se modelar esta situação através das condições de contorno de Neumann da seguinte forma

$$\frac{\partial h}{\partial z}(0, t) = f_1(t), \quad t \geq 0 \quad (3.19)$$

ou ainda

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}(0, t) = g_1(t), \quad t \geq 0, \quad (3.20)$$

em que estas condições modelam a forma como a água se redistribui para profundidades além de $z = L$.

Uma outra condição possível surge assumindo que a coluna de solo continua para além da parcela amostral considerada. Assim, dado um perfil cuja altura é $z = L$, sob condições naturais, a coluna não termina em $z = L$, mas continua para além deste ponto. A condição que surge a partir dessa hipótese também pode ser expressa

por uma condição de Neumann no fundo do perfil de solo,

$$\frac{\partial h}{\partial z}(L, t) = f_2(t), \quad t \geq 0 \quad (3.21)$$

ou ainda

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}(L, t) = g_2(t), \quad t \geq 0. \quad (3.22)$$

Estas relações informam que o processo de infiltração continua acontecendo ao ultrapassar a profundidade experimental considerada.

Por ser uma EDP não linear, a equação de Richards possui solução analítica geral apenas para casos muito específicos, como pode ser visto no trabalho de (PHILIP, 1969), em que foi resolvida a forma h da ER com condições iniciais e de contorno bastante restritivas e simples (HAVERKAMP *et al.*, 1977; KUMAR, 1998). O problema de interesse para (PHILIP, 1969) era a infiltração de água em uma coluna de solo homogênea, inicialmente seca e que tende à saturação ao longo do processo. Uma das conclusões importantes e que podem ser vistas no trabalho de (PHILIP, 1969) é que a faixa de tempo em que há convergência de soluções da ER depende das características do solo e das condições iniciais e de contorno.

Uma vez que a distribuição de água no solo já foi modelada como uma EDP e enunciadas as condições iniciais e de fronteira, resta agora a tarefa de determinar, se possível, uma solução para este problema. Faz-se necessário, então, determinar uma solução aproximada para esta equação através de algum método computacional.

Capítulo 4

Modelo Numérico

O modelo para fluxo vertical de água em um perfil de solo terá como base a equação de (RICHARDS, 1931). Esta é uma EDP parabólica não linear. Devido à não linearidade, o cálculo de uma solução analítica se torna tarefa difícil. Sendo possível, apenas para problemas muito específicos (HAVERKAMP *et al.*, 1977; KUMAR, 1998; MANNICH, 2009), como estudado por (PHILIP, 1969). Este determinou uma solução semi-analítica para a ER considerando condições de contorno e iniciais simplificadas. Para problemas mais gerais, seria necessária a imposição de muitas restrições que podem acarretar soluções de baixa qualidade e consequente descaracterização do problema. Portanto, se torna mais conveniente aproximar uma solução através de métodos numéricos e computacionais.

A estratégia adotada neste trabalho para aproximar a solução da equação de Richards será o método de volumes finitos. De fato, os métodos de diferenças finitas (CELIA *et al.*, 1990) e elementos finitos (FORSYTH *et al.*, 1995; PANDAY *et al.*, 1993) têm sido os mais pesquisados. Entretanto, o MVF (EYMARD *et al.*, 1999, 2001; MANZINI e FERRARIS, 2004; TAKEUCHI *et al.*, 2010; ZAMBRA *et al.*, 2012), apesar de pouco utilizado na literatura, se comparado aos outros dois, segundo (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013), é uma alternativa de aproximação interessante por ser, segundo (FERZIGER *et al.*, 2019), naturalmente conservativo. Neste método as equações aproximadas são obtidas através de balanços de conservação da propriedade envolvida no volume elementar (FERZIGER *et al.*, 2019; MALISKA, 2004).

4.1 Método de Volumes Finitos

O método de volumes finitos é uma técnica de discretização que, segundo (HIRSCH, 2007), foi introduzido na solução numérica de problemas de Dinâmica dos Fluidos por McDonald (1971) e Mac-Cormack e Paullay (1972), para solução de equações de Euler dependentes do tempo em duas dimensões. Posteriormente, esse raciocínio

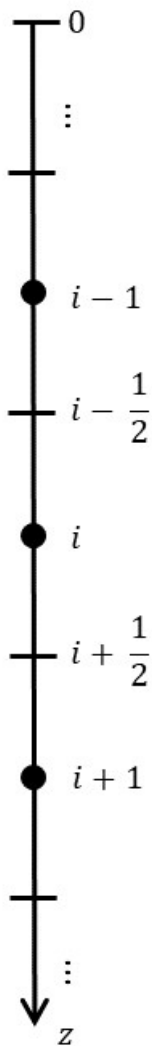


Figura 4.1: Esquema de volumes finitos

foi estendido por Rizzi e Inouye (1973) para problemas de fluxos em três dimensões.

Uma importante característica do MVF é a conservação de propriedades físicas como, por exemplo, massa, momento ou energia. Isso acontece pois o método realiza o balanço, por exemplo, de massa dentro dos volumes de controle considerados, onde o fluxo em questão atravessa as faces dos volumes de controle. Justifica-se assim a escolha por estudar o MVF no presente trabalho.

O método numérico, quando aplicado à ER para uma dimensão, considera o domínio espacial do problema em questão $[a, b]$, para $a, b \in \mathbb{R}$ e divide-o em um número finito, $M \in \mathbb{N}$, de volumes de controle (ou células) não sobrepostos e com espaçamento constante $\Delta z = (b - a)/M$. Assim cria-se uma malha computacional dada por $M + 1$ pontos que possuem a forma $z_i = a + i\Delta z$, com $i = 0, 1, 2, \dots, M$. Na discretização temporal, considera-se o intervalo de tempo $[0, t]$. Então os nós da malha temporal serão dados por $t_j = j\Delta t$, com $j = 0, 1, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$ e $\Delta t = t/N$.

Em seguida, integra-se, no espaço, sobre cada volume de controle, a forma dife-

rencial das equações que governam o fenômeno avaliado. A figura 4.1 representa uma célula de discretização arbitrária em uma dimensão. O volume de controle central i é onde o balanço de fluxo será realizado. Os vizinhos da célula central são os volumes de controle $i - 1$ e $i + 1$ que possuem uma face (ponto, no caso unidimensional) compartilhada com i . Os pontos médios das faces compartilhadas são representados por $i - \frac{1}{2}$ e $i + \frac{1}{2}$ correspondendo, respectivamente às faces compartilhadas entre os volumes $i - 1$ e $i + 1$ e o volume central i .

Com o objetivo de diferenciar os índices espaciais e temporais será usada a notação simplificada a seguir

$$\theta_i^j = \theta(z_i, t_j)$$

para indicar, por exemplo, a umidade θ na posição z_i e no nível de tempo t_j . Dessa forma, os índices inferiores farão referência à malha espacial enquanto os índices superiores indicarão a malha usada na discretização temporal.

4.2 Aplicação

Nesta seção os conceitos apresentados serão utilizados para modelar o problema de fluxo unidimensional de água no solo. Sendo assim, considera-se a equação de (RICHARDS, 1931) em sua forma mista

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \left(1 + \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right]$$

além disso, o domínio $[a, b]$ utilizado será o segmento de reta que inicia no ponto $a = 0$ e se prolonga até o limite do perfil de solo em questão, onde $b = L$.

Dividindo o domínio em M células não sobrepostas $[z_{i-1/2}, z_{i+1/2}]$ e integrando a forma mista da equação (3.7) sobre a célula i tem-se

$$\int_{\Delta z} \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = \int_{\Delta z} \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \left(1 + \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right] dz \quad (4.1)$$

onde $\Delta z = z_{i+1/2} - z_{i-1/2}$, é o tamanho da malha, pois a malha considerada neste estudo é uniforme. O desenho da célula i é mostrado na Figura 4.1.

4.2.1 Discretização espacial

Na equação (4.1), será aplicado o Teorema do Valor Médio para Integrais (TVMI) (LIMA, 2004) tendo em vista desenvolver o lado esquerdo da igualdade. Dessa forma, supondo que $\frac{\partial \theta}{\partial t}(z, t)$ seja uma função contínua, pelo TVMI, existe $c \in [z_{i-1/2}, z_{i+1/2}]$

tal que

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = (z_{i-1/2} - z_{i+1/2}) \frac{\partial \theta}{\partial t}(c, t) \approx \Delta z \frac{\partial \theta}{\partial t}(z_i, t) = \Delta z \frac{\partial \theta_i}{\partial t}. \quad (4.2)$$

O Teorema Fundamental do Cálculo (LIMA, 2004) será aplicado para o termo à direita da equação (4.1), então chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \Delta z &= K \left(1 + \frac{\partial h}{\partial z} \right) \Bigg|_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \\ &= K_{i+1/2} \left(1 + \frac{\partial h}{\partial z}(t, z_{i+1/2}) \right) - K_{i-1/2} \left(1 + \frac{\partial h}{\partial z}(t, z_{i-1/2}) \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para simplificar a notação, a dependência de K e θ em h foi desconsiderada, mas deve ser lembrado que tal dependência ainda existe. Além disso, a aproximação para a derivada $\frac{\partial h}{\partial z}$ será feita por um esquema de diferenças finitas centrada em $z_{i\pm 1/2}$, da seguinte forma:

$$\frac{\partial h}{\partial z}(t, z_{i\pm 1/2}) = \frac{\partial h_{i\pm 1/2}}{\partial z} = \begin{cases} \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta z} + O[(\Delta z)^2], & z = z_{i+1/2} \\ \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta z} + O[(\Delta z)^2], & z = z_{i-1/2} \end{cases} \quad (4.4)$$

Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \Delta z &= K_{i+1/2} + K_{i+1/2} \frac{h_{i+1} - h_i}{z_{i+1} - z_i} - K_{i-1/2} - K_{i-1/2} \frac{h_i - h_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \\ &= K_{i+1/2} + K_{i+1/2} \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta z} - K_{i-1/2} - K_{i-1/2} \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta z} \\ &= \frac{K_{i+1/2} h_{i+1} - (K_{i+1/2} + K_{i-1/2}) h_i + K_{i-1/2} h_{i-1}}{\Delta z} + K_{i+1/2} - K_{i-1/2}. \end{aligned}$$

A discretização espacial para a equação (3.7) é, portanto

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{1}{(\Delta z)^2} [K_{i+1/2} h_{i+1} - (K_{i+1/2} + K_{i-1/2}) h_i + K_{i-1/2} h_{i-1}] + \frac{K_{i+1/2} - K_{i-1/2}}{\Delta z}. \quad (4.5)$$

4.2.2 Discretização Temporal

Neste trabalho, será desenvolvido esquemas explícitos e implícitos para a discretização temporal da forma mista da equação de Richards. Esses esquemas serão fundamentados nos métodos de Euler avançado e atrasado, respectivamente.

Esquema Explícito

O método de Euler avançado faz uso da seguinte aproximação para a derivada da umidade em relação ao tempo

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \approx \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) na equação (4.5) obtém-se

$$\frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta z)^2} \left[K_{i+1/2}^j h_{i+1}^j - (K_{i+1/2}^j + K_{i-1/2}^j) h_i^j + K_{i-1/2}^j h_{i-1}^j \right] + \frac{K_{i+1/2}^j - K_{i-1/2}^j}{\Delta z} \quad (4.7)$$

e, isolando o termo θ_i^{j+1} tem-se o esquema explícito de discretização temporal para a equação (3.7). Para simplificar, esse esquema será denotado por EM.

$$\begin{aligned} \theta_i^{j+1} = & \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \left[K_{i+1/2}^j h_{i+1}^j - (K_{i+1/2}^j + K_{i-1/2}^j) h_i^j + K_{i-1/2}^j h_{i-1}^j \right] + \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta z} [K_{i+1/2}^j - K_{i-1/2}^j] + \theta_i^j \end{aligned} \quad (4.8)$$

Este esquema explícito é condicionalmente estável e a condição para estabilidade é uma relação que envolve não só Δt , como também Δz e parâmetros da EDP (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013). Um método de solução numérica é considerado estável se não aumentar os erros que aparecem no decorrer do processo de solução numérica. Para um problema linear, esta condição é provada pelo método de von Neumann (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013; IÓRIO, 2016). Entretanto, segundo (FERZIGER *et al.*, 2019), a estabilidade pode ser difícil de investigar quando há condições de contorno e não linearidade, como é o caso da ER. Por esse motivo, é comum investigar a estabilidade de um método para problemas lineares com coeficientes constantes e sem condições de contorno, como foi feito por (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013). Dessa maneira, os resultados obtidos geralmente podem ser aplicados a problemas mais complexos.

Esquema Implícito

Com o objetivo de formular o esquema implícito para a forma mista da equação de Richards, combina-se o método de Euler atrasado, da seguinte forma

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \approx \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (4.9)$$

com a discretização espacial (4.5), resultando na equação a seguir

$$\frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta z)^2} \left[K_{i+1/2}^{j+1} h_{i+1}^{j+1} - (K_{i+1/2}^{j+1} + K_{i-1/2}^{j+1}) h_i^{j+1} + K_{i-1/2}^{j+1} h_{i-1}^{j+1} \right] + \frac{K_{i+1/2}^{j+1} - K_{i-1/2}^{j+1}}{\Delta z}. \quad (4.10)$$

que, colocando em evidência os termos referentes à condutividade hidráulica, gera a seguinte expressão

$$\frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta z)^2} \left[K_{i+1/2}^{j+1} (h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}) - K_{i-1/2}^{j+1} (h_i^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}) \right] + \frac{K_{i+1/2}^{j+1} - K_{i-1/2}^{j+1}}{\Delta z}. \quad (4.11)$$

A formulação implícita e a alta não linearidade dos termos envolvidos nesta equação requerem o uso de um procedimento de linearização. Os esquemas de Picard e Newton são boas escolhas, de acordo com a literatura (ISAACSON e HERBERT, 2012). Vários autores (FORSYTH *et al.*, 1995; LEHMANN e ACKERER, 1998; PANICONI e PUTTI, 1994) relatam que o esquema de Newton pode ser, em alguns casos, mais eficiente do que o esquema de Picard, e até converge quando o esquema de Picard não, mas em outros casos, pode convergir para a solução errada (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013). Por isso, a princípio, o esquema de Picard será implementado neste trabalho.

O método de Picard envolve estimativas sucessivas de h fazendo uso das últimas estimativas de C e K . Em termos de notação, as iterações serão denotadas pelo sobrescrito m . Os termos K e C serão aproximados pela iteração de Picard no tempo $(n+1, m)$ e a carga hidráulica é resolvida no tempo $(n+1, m+1)$. Este procedimento torna a equação (4.11) linearizada. As iterações continuam até que um critério de parada seja satisfeito. Um possível critério de parada é fazer com que a diferença de duas iterações sucessivas m e $m+1$ seja menor do que uma tolerância ϵ , ou seja,

$$\| h^{m+1} - h^m \| = \delta^m < \epsilon. \quad (4.12)$$

Informações mais detalhadas sobre o método de Picard podem ser encontradas em (QUEIRÓZ, 2017).

Então, usando os índices m da iteração de Picard, a equação (4.11) pode ser

reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\theta_i^{j+1,m+1} - \theta_i^j}{\Delta t} &= \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m}(h_{i+1}^{j+1,m+1} - h_i^{j+1,m+1}) - K_{i-1/2}^{j+1,m}(h_i^{j+1,m+1} - h_{i-1}^{j+1,m+1})}{(\Delta z)^2} + \\ &+ \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m} - K_{i-1/2}^{j+1,m}}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para se beneficiar de vantagens das formas θ e h da equação de Richards, (CELIA *et al.*, 1990) propõe uma aproximação para a forma mista fazendo uso da expansão de Taylor de primeira ordem e da igualdade (3.8). Se este método não for adotado, o esquema implícito para a forma mista apresenta falhas na conservação de massa (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013). Dessa forma, o termo $\theta^{j+1,m+1}$ será expandido em série de Taylor com respeito a h em torno do ponto $h^{j+1,m}$

$$\theta^{j+1,m+1} = \theta^{j+1,m} + \frac{\partial \theta}{\partial h}(h^{j+1,m})(h^{j+1,m+1} - h^{j+1,m}) + O(\delta^2) \quad (4.14)$$

substituindo (3.8) nesta equação, tem-se

$$\theta^{j+1,m+1} = \theta^{j+1,m} + C(h^{j+1,m})(h^{j+1,m+1} - h^{j+1,m}) + O(\delta^2) \quad (4.15)$$

e, para simplificar a notação, usa-se $C(h_i^{n+1,m}) = C_i^{n+1,m}$.

Desconsiderando o termo $O(\delta^2)$ e substituindo (4.15) em (4.13), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\theta_i^{j+1,m} - \theta_i^j}{\Delta t} + \frac{C_i^{j+1,m}}{\Delta t}(h^{j+1,m+1} - h^{j+1,m}) &= \\ \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m}(h_{i+1}^{j+1,m+1} - h_i^{j+1,m+1}) - K_{i-1/2}^{j+1,m}(h_i^{j+1,m+1} - h_{i-1}^{j+1,m+1})}{(\Delta z)^2} &+ \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m} - K_{i-1/2}^{j+1,m}}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Considere a expressão abaixo

$$\begin{aligned} &\frac{K_{i+1/2}^{j+1,m}(h_{i+1}^{j+1,m} - h_i^{j+1,m}) - K_{i-1/2}^{j+1,m}(h_i^{j+1,m} - h_{i-1}^{j+1,m})}{(\Delta z)^2} - \\ &- \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m}(h_{i+1}^{j+1,m} - h_i^{j+1,m}) - K_{i-1/2}^{j+1,m}(h_i^{j+1,m} - h_{i-1}^{j+1,m})}{(\Delta z)^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Somando as equações (4.16) e (4.17), tem-se

$$\begin{aligned}
& -\frac{C_i^{j+1,m}}{\Delta t}(h^{j+1,m+1} - h^{j+1,m}) + \frac{\theta_i^{j+1,m} - \theta_i^j}{\Delta t} \\
& - \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m}(h_{i+1}^{j+1,m+1} - h_i^{j+1,m+1}) - K_{i-1/2}^{j+1,m}(h_i^{j+1,m+1} - h_{i-1}^{j+1,m+1})}{(\Delta z)^2} \\
& + \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m}(h_{i+1}^{j+1,m} - h_i^{j+1,m}) - K_{i-1/2}^{j+1,m}(h_i^{j+1,m} - h_{i-1}^{j+1,m})}{(\Delta z)^2} = \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m} - K_{i-1/2}^{j+1,m}}{\Delta z} \\
& + \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m}(h_{i+1}^{j+1,m} - h_i^{j+1,m}) - K_{i-1/2}^{j+1,m}(h_i^{j+1,m} - h_{i-1}^{j+1,m})}{(\Delta z)^2}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Fazendo $\delta_n^m = h_n^{j+1,m+1} - h_n^{j+1,m}$, para $n = i-1, i$ ou $i+1$ obtém-se o esquema implícito de discretização temporal para a equação (3.7) como segue

$$\frac{C_i^{j+1,m}}{\Delta t}\delta_i^m - \frac{K_{i-1/2}^{j+1,m}\delta_{i-1}^m - (K_{i+1/2}^{j+1,m} + K_{i-1/2}^{j+1,m})\delta_i^m - K_{i+1/2}^{j+1,m}\delta_{i+1}^m}{(\Delta z)^2} = f_i^{j+1,m}, \tag{4.19}$$

em que

$$\begin{aligned}
f_i^{j+1,m} &= \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m}(h_{i+1}^{j+1,m} - h_i^{j+1,m}) - K_{i-1/2}^{j+1,m}(h_i^{j+1,m} - h_{i-1}^{j+1,m})}{(\Delta z)^2} \\
& + \frac{K_{i+1/2}^{j+1,m} - K_{i-1/2}^{j+1,m}}{\Delta z} - \frac{\theta_i^{j+1,m} - \theta_i^j}{\Delta t}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

A equação (4.19) pode ser sintetizada fazendo uso de coeficientes

$$a_i\delta_{i-1}^m + b_i\delta_i^m + c_i\delta_{i+1}^m = f_i^{j+1,m} \tag{4.21}$$

em que os termos a_i , b_i , c_i e f_i são dados por

$$a_i = -\frac{1}{(\Delta z)^2}K_{i-1/2}^{j+1,m}, \tag{4.22}$$

$$b_i = \frac{1}{(\Delta z)^2}(K_{i+1/2}^{j+1,m} + K_{i-1/2}^{j+1,m}) + \frac{C_i^{j+1,m}}{\Delta t}, \tag{4.23}$$

$$c_i = -\frac{1}{(\Delta z)^2}K_{i+1/2}^{j+1,m}, \tag{4.24}$$

A equação (4.21) forma o sistema tridiagonal $A(h^{j+1,m})\delta^m = f^{j+1,m}$ que é expresso

a seguir

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_M & b_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1^m \\ \delta_2^m \\ \vdots \\ \delta_{M-1}^m \\ \delta_M^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^{j+1,m} \\ f_2^{j+1,m} \\ \cdots \\ f_{M-1}^{j+1,m} \\ f_M^{j+1,m} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Portanto, em cada passo no tempo, o método de Picard implica que serão solucionados sistemas lineares tridiagonais tantas vezes quanto a condição de parada for atingida.

Por se tratar de um problema não linear, não se pode garantir estabilidade para o esquema de discretização temporal implícito da ER. Isto porque o método de von Neumann, geralmente usado para provar que este esquema é incondicionalmente estável, é aplicado apenas para problemas lineares (IÓRIO, 2016). Entretanto, segundo as análises feitas por (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013), ainda não foram encontradas instabilidades para o esquema implícito aplicado à forma mista da ER. Dessa forma, o esquema implícito aqui apresentado é, a princípio, estável.

Para esquemas de discretização temporal, esquemas implícitos são mais usados para evitar restrições temporais e espaciais que ocorrem em esquemas explícitos (LAI e OGDEN, 2015). No entanto, o esquema implícito e a complexa não linearidade da ER podem causar dificuldades na convergência de soluções iterativas que envolvem sistemas não lineares (FORSYTH *et al.*, 1995; LEHMANN e ACKERER, 1998), como é o caso dos sistemas que ocorrem neste trabalho. Segundo (FERZIGER *et al.*, 2019), um método numérico é convergente se a solução das equações discretizadas tende à solução exata da equação diferencial, quando a malha considerada é tão pequena quanto se possa definir. Para problemas lineares, o teorema de equivalência de Lax afirma que se um método é consistente e estável, então ele é convergente (LAX e RICHTMYER, 1956). Para problemas não lineares que são fortemente influenciados por condições de contorno, a estabilidade e a convergência de um método são difíceis de demonstrar (FERZIGER *et al.*, 2019). Portanto, a convergência é geralmente verificada usando experimentos numéricos, isto é, repetindo o cálculo em uma série de malhas sucessivamente refinadas. Este será o método usado nesta pesquisa para verificar a convergência do método proposto. Questões como esta, envolvendo simulações computacionais, serão tratadas no próximo capítulo.

Capítulo 5

Simulações, Resultados e Discussões

Este capítulo tem por objetivo detalhar a metodologia utilizada para simulações com a solução computacional da equação de Richards, implementada e fundamentada no método de volumes finitos. O código computacional foi desenvolvido no ambiente GNU Octave (EATON *et al.*, 2020).

O capítulo foi dividido em três seções. Na primeira, o código, tanto na formulação explícita quanto na implícita, será testado com dados de problemas relatados em (CELIA *et al.*, 1990). Nestas simulações os solos eram homogêneos em todo o perfil considerado.

A fim de avaliar e aplicar o modelo computacional implementado a perfis de solos não homogêneos, um experimento de campo foi realizado. Este teve como objetivo medir, em diferentes profundidades, a umidade que mudava com o tempo como consequência de submeter o solo a uma carga hidráulica constante. Por este motivo, a segunda parte deste capítulo descreve brevemente o experimento realizado em campo e aplica o modelo computacional a estes dados.

A terceira, e última, seção se concentra em discutir a convergência do método numérico. Isto é feito através de um experimento numérico em que os passos de tempo, Δt , são refinados e, para cada uma dessas simulações é calculado um erro relativo. Foi necessário este procedimento devido à não linearidade da equação que descreve o fenômeno, como comentado no capítulo anterior.

5.1 Verificação computacional para dados da literatura

Detalhando um pouco mais, a pesquisa desenvolvida por (CELIA *et al.*, 1990), este artigo utiliza apenas esquemas implícitos e os métodos os métodos de elementos

finitos e diferenças finitas para obter soluções numéricas da ER. Além disso, dá ênfase à forma mista da ER, pois esta produz soluções conservadoras de massa, o que não acontece quando faz-se uso da forma h .

Dois solos que possuem características distintas foram usados por (CELIA *et al.*, 1990) para realizar as simulações. O primeiro, aqui rotulado de solo 1, foi descrito como sendo predominantemente arenoso e tem profundidade $40cm$. Para o segundo solo, aqui nomeado solo 2, não foram obtidas informações a respeito de classificação, apenas é informado por (ZARBA, 1988) que é um solo de campo do Novo México e tem $60cm$ de profundidade.

Cada um dos solos considerados possui, segundo suas características, uma curva de retenção distinta. Esta descreve as relações $\theta = \theta(h)$ e $K = K(h)$ e pode ser representada através de vários modelos. Porém, os que serão usados neste trabalho são os modelos de (HAVERKAMP *et al.*, 1977) e (VAN GENUCHTEN, 1980). O primeiro, modelo de Haverkamp, descreve a umidade e a condutividade hidráulica de acordo com as equações (2.21) e (2.22), este será usado para descrever o solo 1, segundo os parâmetros apresentados na tabela (5.1). Já o modelo de van-Genuchten (VAN GENUCHTEN, 1980), expressa as relações $\theta = \theta(h)$ e, segundo (MUALEM, 1976), $K = K(h)$ de acordo com as equações (2.23) e (2.27), e será usado para descrever as relações referentes ao solo 1, segundo os parâmetros dados na tabela (5.2).

α	β	θ_r	θ_s	A	γ	K_{sat}
$1,61 \times 10^6$	3,96	0,075	0,287	$1,175 \times 10^6$	1,74	0,0094

Tabela 5.1: Parâmetros para curva de retenção do solo 1.

α	n	θ_r	θ_s	K_{sat}
0,0335	2	0,102	0,368	0,00922

Tabela 5.2: Parâmetros para curva de retenção do solo 2.

Para o solo 1, além da ER em sua forma mista, foram usadas as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} h(0, t) = -20,7cm \\ h(40, t) = -61,5cm \end{cases} \quad (5.1)$$

e, como condição inicial, utilizou-se $h(z, 0) = -61,5cm$.

De maneira semelhante à esta abordagem, para o solo 2, as condições de contorno foram

$$\begin{cases} h(0, t) = -75cm \\ h(60, t) = -1000cm \end{cases} \quad (5.2)$$

e, a condição inicial usada foi $h(z, 0) = -1000\text{cm}$.

A condição inicial expressa a situação em que o solo se encontra no primeiro momento do experimento. Dessa forma, as condições nesses dois experimentos traduzem um solo inicialmente seco, pois os potenciais ($h(z, 0) = -61,5\text{cm}$ para o solo 1 e $h(z, 0) = -1000\text{cm}$ para o solo 2) são menores se comparados àqueles da condição de contorno na fronteira superior ($h(0, t) = -20,7\text{cm}$ para o solo 1 e $h(0, t) = -75\text{cm}$ para o solo 2). Isto retrata o cenário de que no primeiro momento ($t = 0$) de análise o solo está seco, mas na fronteira superior ($z = 0$) o solo está sendo submetido à uma coluna d'água que aumenta o potencial matricial com o passar do tempo. Assim, um potencial matricial menor representa um solo com menos água, isto leva as forças de capilaridade a dificultarem a retirada da pouca água que ainda está alocada neste solo, diminuindo o potencial matricial. Por outro lado, quanto mais água está presente no solo, mais fácil é para retirá-la, assim, as forças capilares não apresentam tanta resistência à essa retirada e o potencial matricial se torna maior. Vale ressaltar que, nestes dois experimentos de (CELIA *et al.*, 1990) os valores usados para condição inicial são iguais aos usados para condição de fronteira inferior, o artigo não relata uma justificativa para este fato.

Em relação às condições de contorno, estas são prefixadas na parte superior ($z = 0$) e na parte inferior ($z = 40$, no solo 1, por exemplo) da coluna de solo. Isto quer dizer que o valor da função $h = h(z, t)$ é fixo (constante) nestas duas posições ao longo de todo o tempo considerado em experimento. Além disso, estas condições informam que não há perda de água por evaporação na parte superior, nem por fluxo ocorrendo através da fronteira inferior.

Portanto, com os cenários bem descritos e entendidos, o que se pretende é testar as implementações do método de volumes finitos, tanto no esquema explícito quanto o implícito, para estes cenários e compará-las com o que foi obtido por (CELIA *et al.*, 1990). Vale ressaltar que, como não foi encontrada na literatura uma condição de estabilidade para o método explícito, buscou-se, através de testes, uma relação entre Δt e Δz que gerasse estabilidade para os ensaios aqui apresentados.

5.1.1 Resultados

As simulações e comparações estão organizadas em quatro ensaios descritos a seguir.

Ensaio 1: Esquema explícito e curva de retenção de Haverkamp (Solo 1)

Na figura (5.1) pode-se observar os gráficos obtidos através da aproximação computacional por MVF com discretização temporal explícita em comparação com aquela realizada por (CELIA *et al.*, 1990), que faz uso do MDF com discretização

temporal implícita, ambas utilizando os parâmetros apresentados na tabela (5.1) para o solo 1. Neste caso, os dados que relacionam profundidade e umidade foram retirados de (HAVERKAMP *et al.*, 1977), assim como os parâmetros apresentados na tabela (5.1).

Como teste preliminar, utilizou-se o esquema explícito. Por se tratar de um esquema condicionalmente estável, os testes utilizaram um espaçamento $\Delta t = 0,1s$ e $\Delta t = 0,01s$ para os tempos finais $T = 6min$ e $T = 12min$, respectivamente. Enquanto Celia (CELIA *et al.*, 1990) fez testes com $\Delta t = 10, 30, 120s$, em todos eles a malha espacial foi tomada com espaçamento $\Delta z = 1cm$. Apesar de trabalhar com uma malha temporal mais refinada, pode-se observar que os resultados não foram prejudicados, ficando próximos àqueles que são esperados.

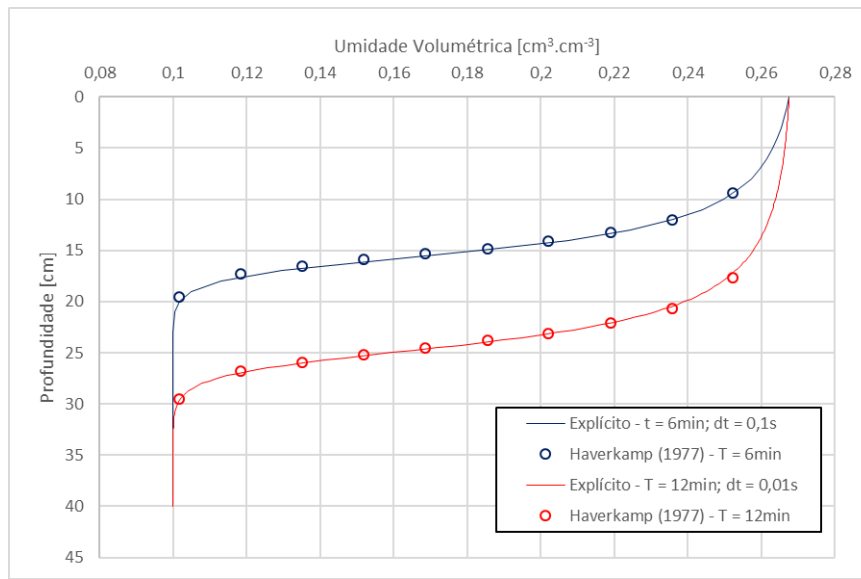


Figura 5.1: Resultado de simulações para solo 1 com base no modelo de Haverkamp e esquema de discretização temporal explícito.

Ensaio 2: Esquema implícito e curva de retenção de Haverkamp (Solo 1)

Para trabalhar com o mesmo espaçamento de malha temporal usado por (CELIA *et al.*, 1990), os testes posteriores contaram com o esquema implícito no tempo. Assim como no teste anterior, dois tempos amostrais foram considerados, a saber $T = 6min$ e $T = 12min$, com malhas $\Delta t = 10, 30, 120s$ e $\Delta z = 1cm$ para o tempo e para o espaço, respectivamente. O resultado que mais se aproximou, sem oscilações, daqueles expostos por (CELIA *et al.*, 1990) foram aqueles em que $\Delta t = 10s$ e podem ser observados na figura (5.2).

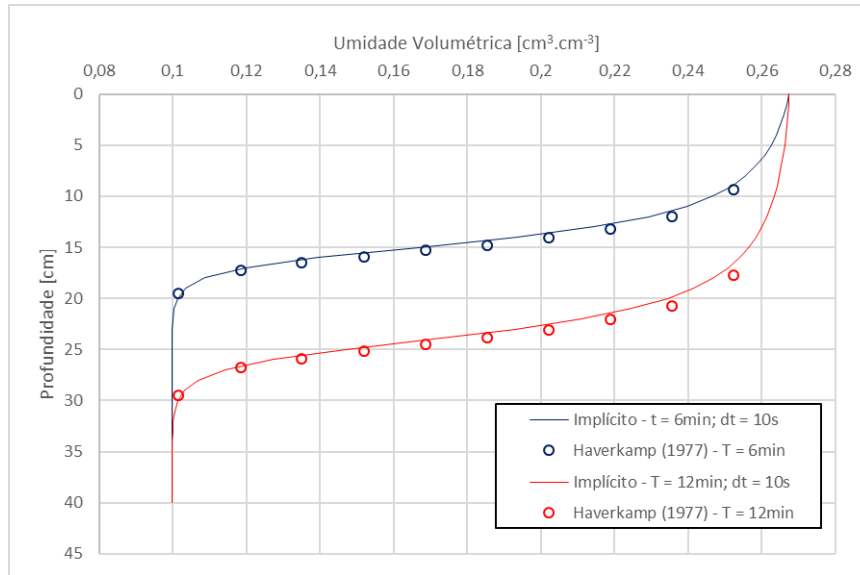


Figura 5.2: Resultado de simulações para solo 1 com base no modelo de Haverkamp e esquema de discretização temporal implícito.

Ensaio 3: Esquema explícito e curva de retenção de van-Genuchten (Solo 2)

Os primeiros testes realizados para o solo 2 podem ser vistos na figura (5.3). Estes ainda consideram o MVF com discretização temporal explícita e são comparados com os resultados de (CELIA *et al.*, 1990) que utiliza o MDF com discretização temporal implícita, ambos fazendo uso de condições de contorno de Dirichlet. Estas simulações tiveram duração total de um dia inteiro, ou seja, $T = 86.400s$ de análise e coleta de dados de infiltração de água no solo. As malhas consideradas para simulação foram $\Delta t = 0,1$ e duas malhas espaciais, uma com $\Delta z = 2,5cm$ e outra com $\Delta z = 0,25$. Já as malhas consideradas por (CELIA *et al.*, 1990) foram $\Delta t = 720s$ e $\Delta t = 3600s$, bem como $\Delta z = 2,5cm$ para a malha espacial.

Os resultados obtidos nestas simulações mostraram que para o tempo final considerado, os passos de tempo escolhidos acarretam saídas de código estáveis e convergentes com as reais. Contudo, verifica-se que as malhas usadas nas simulações precisaram ser bem mais refinadas do que as consideradas por (CELIA *et al.*, 1990). Este fato pode ser explicado pela utilização do esquema de discretização explícito no tempo que é, por construção, condicionalmente estável. Para alcançar estabilidade com este tipo de aproximação, geralmente são usados passos de tempo menores do que os usados para um esquema implícito no tempo.

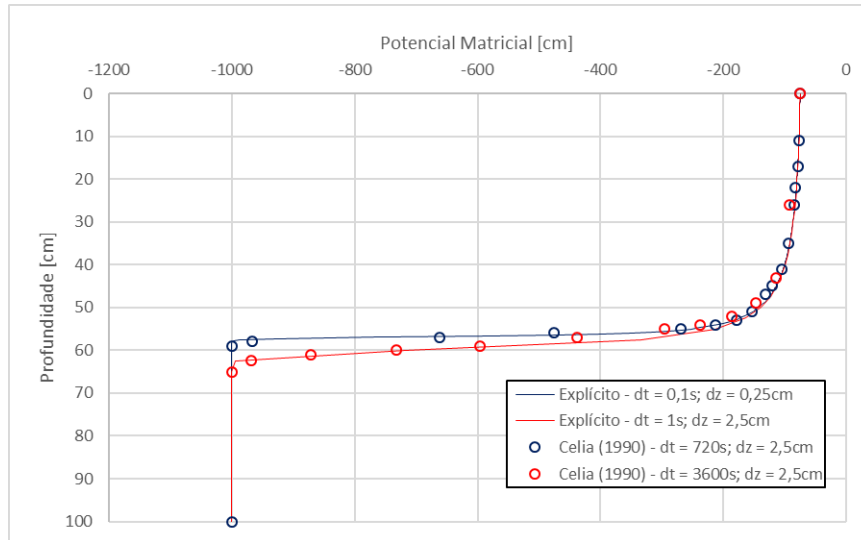


Figura 5.3: Resultado de simulações para solo 2 com base no modelo de van-Genuchten e esquema de discretização temporal explícito.

Ensaio 4: Esquema implícito e curva de retenção de van-Genuchten (Solo 2)

O último ensaio feito para verificação do código computacional tem como base os dados da tabela (5.2), para o solo 2. Estes consideraram o esquema implícito para discretização temporal e as mesmas malhas de (CELIA *et al.*, 1990) para o tempo e para o espaço. São elas $\Delta t = 720$ e $3600s$ e $\Delta z = 2,5cm$.

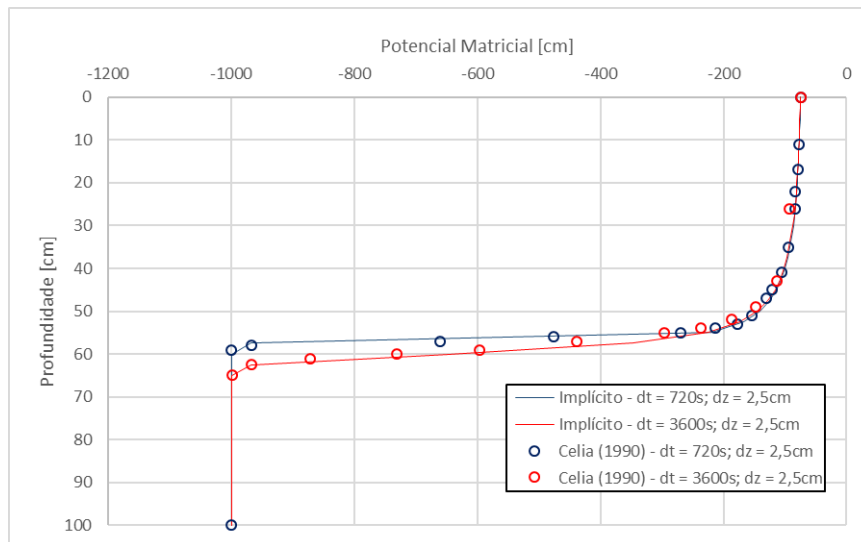


Figura 5.4: Resultado de simulações para solo 2 com base no modelo de van-Genuchten e esquema de discretização temporal implícito

5.2 Simulação com dados de campo

Para as simulações desta seção foi realizado um experimento de campo entre os dias 01/07 e 12/07 de 2019, descrito resumidamente nos parágrafos abaixo. Informações adicionais podem ser encontradas nos apêndices.

5.2.1 Experimento de campo

Esquematizado em três planossolos distintos, o experimento de campo foi montado em uma área disponibilizada pelo SIPA (Sistema Integrado de Produção Agroecológica) da Fazendinha Agroecológica km 47. O perfil desses Planossolos, denominados aqui como P2, P5 e P7, possuía 70cm profundidade demarcada para efeito de cálculos. Além disso, cada um dos perfis estudados era composto por três horizontes distintos. O primeiro, horizonte A, possuindo principalmente areia e matéria orgânica; o segundo, horizonte E, é constituído principalmente por areia e o terceiro, e mais profundo, horizonte B, composto majoritariamente por argila. A descrição morfológica destes perfis e seus horizontes pode ser encontrada, mais detalhadamente, no Apêndice A deste trabalho. É importante salientar que, mesmo tendo confeccionado o experimento de campo para três planossolos, optou-se por considerar para cálculos e análises apenas os dados do perfil P2. Esta escolha foi feita devido ao fato de que a curva característica da água no solo foi obtida em laboratório somente para este perfil.

Na região destinada ao experimento e em cada um dos perfis foram demarcadas 3 parcelas próximas alinhadas com distância de 2m, aproximadamente, uma da outra, com o objetivo de disponibilizar três pontos de medições diferentes. Isto é, três repetições para cada perfil de solo considerado. As parcelas experimentais foram demarcadas cada uma por um anel de 60cm de diâmetro, 25 cm de altura e 0,5cm de espessura. Este anel foi cravado 5cm para dentro do solo, aproximadamente, tendo em vista evitar vazamento da lâmina d'água na região de contato entre o anel e a superfície do solo. Além disso, o anel de ferro foi fixado de forma que em seu centro estava um tubo de acrílico de 1m de altura e 4,4cm de diâmetro, o qual foi introduzido no solo de acordo com as especificações contidas em MANUAL-TDR (2017).

Através do tubo de acrílico o sensor TDR PICO-BT(IMKO) pode ser introduzido fornecendo a constante dielétrica do solo a cada profundidade estabelecida. Mais detalhes a respeito do funcionamento do sensor TDR podem ser encontrados em [MANUAL-TDR (2017)]. O TDR foi utilizado para medir a constante dielétrica (K_a) do solo no sentido vertical e, a partir desta, a umidade volumétrica (θ) foi calculada.

O cálculo usado para converter K_a em θ é comumente feito através da equação de

TOPP *et al.* (1980), que é considerada a equação universal padrão usada neste tipo de cálculo. Contudo ela não se adequou de forma considerável às características dos solos estudados. Por isso optou-se por realizar um outro experimento tendo em vista obter uma equação de calibração, do tipo $\theta = \theta(K_a)$ para os horizontes estudados. A equação obtida seria específica para o solo estudado neste trabalho e foi usada para converter adequadamente os valores de K_a em θ . O aparato experimental confeccionado para obter a curva de calibração está descrito nos apêndices deste trabalho.

A partir da montagem descrita, para que fosse possível avaliar a taxa de infiltração da água através dos horizontes, foi mantida constante uma lâmina d'água de 2,5cm dentro das áreas demarcadas pelo anel de ferro.

Para medir a umidade do solo a cada profundidade definiu-se um arranjo experimental que respeita os horizontes do solo. Na descrição morfológica dos perfis estudados, o primeiro horizonte encontra-se, em média, na faixa de 0 a 22cm, o segundo horizonte de 22cm até 69cm e o terceiro horizonte de 69cm a 80cm. Além disso, de acordo com as especificações do sensor TDR utilizado, cada valor de umidade gerado corresponde à umidade em um cilindro de solo de 22cm de altura e 15cm de raio. Dessa forma, admitiu-se que os valores observados a cada medição correspondem a umidade no centro de uma faixa de 20cm de profundidade.

Feitas essas considerações, as medições foram executadas respeitando intervalos sobrepostos de 20cm de altura, ou seja, [0,20]; [10,30]; [20,40]; [30,50]; [40,60] e [50,70]. Como os valores observados foram considerados no centro de cada uma dessas faixas, a medição no intervalo [0,20] equivale à constante dielétrica na profundidade 10cm; a medição no intervalo [10,30] equivale à constante dielétrica na profundidade 20cm, e assim sucessivamente. Com essa estruturação, foram feitas duas medições para o horizonte A (10cm e 20cm) e quatro medições para o horizonte E (30, 40, 50 e 60cm). Dessa forma o perfil estudado possuirá 69cm de profundidade, respeitando o espaço de solo ocupado pelo horizonte E e tendo em vista que a medida feita em 60cm corresponde ao intervalo [50,70]. Como as medidas foram feitas até o intervalo de profundidade [50,70] e esta medida corresponde à umidade em 60cm de profundidade, considerou-se para simulações apenas os horizontes A e E.

As visitas ao local onde foi montado o aparato experimental ocorreram durante 8 dias não consecutivos, a saber 01/07/2019, 02/07/2019, 03/07/2019, 08/07/2019, 09/07/2019, 10/07/2019, 11/07/2019 e 12/07/2019, com um total de 2h30min, em média, de medições por dia. Na primeira hora, foram obtidos dados a cada 5min, na segunda hora, obteve-se dados a cada 10min e no tempo restante as medições ocorreram a cada 15min. Este esquema foi adotado porque na primeira hora de medição verificou-se que não havia alterações relevantes para serem avaliadas num

período de tempo pequeno (5 minutos), por isso, levou-se em consideração intervalos de tempo maiores a cada hora.

5.2.2 Relações constitutivas e obtenção dos parâmetros de ajuste

Os dados utilizados para confecção da curva de retenção para o perfil P2, foram obtidos através do método da panela de pressão descrito por (KLAR, 1988; LIBARDI, 2005; REICHARDT, 1985; REICHARDT e TIMM, 2004). Este ensaio foi realizado nos laboratórios do Departamento de Solos da UFRRJ.

Uma observação importante a ser feita é que o solo experimental é não homogêneo, possuindo 3 horizontes com características distintas. Os dados que relacionam o teor de umidade com a respectiva carga hidráulica para a confecção da curva de retenção dizem respeito às camadas de 0 a 22cm (horizonte A) e 22cm a 69cm (horizonte E). Os experimentos para a obtenção da curva de retenção do solo contaram com três repetições para cada horizonte. Considerou-se a média aritmética entre os valores das umidades observadas para os dois horizontes nos três diferentes pontos amostrais (repetições) considerados no perfil P2. As curvas ajustadas para os respectivos horizontes estão apresentadas nos gráficos da figura (5.5). Para uma melhor visualização do comportamento da curva, optou-se por expressar o potencial matricial em escala logarítmica.

Para o ajuste de dados em uma curva de retenção utilizou-se o *software* SWRC *online* (SEKI, 2007) e os modelos de (VAN GENUCHTEN, 1980) e (BROOKS e COREY, 1964). Este *software*, de forma simplificada, funciona fazendo o ajuste não linear das curvas de retenção pelo método de Levenberg-Marquardt (MARQUARDT, 1963). Podendo escolher entre 5 modelos, entre eles os escolhidos por este estudo, o usuário insere as coordenadas potencial matricial e umidade para obter os parâmetros necessários (SEKI, 2007).

Optou-se, inicialmente, por ajustar a curva de retenção através do modelo de van-Genuchten, devido ao amplo reconhecimento deste na literatura (CAVIEDES-VOULLIÈME *et al.*, 2013; CELIA *et al.*, 1990; FARTHING e OGDEN, 2017; LAI e OGDEN, 2015; LEHMANN e ACKERER, 1998; SIMUNEK, 2006). Contudo, a condutividade hidráulica obtida por (MUALEM, 1976) para este modelo retornou resultados atrasados nas simulações computacionais. Por ser um modelo dado por expressões mais simples e por retornar melhores soluções, como será mostrado mais adiante, escolheu-se trabalhar com o modelo de (BROOKS e COREY, 1964).

Os pares potencial matricial e umidade, fornecidos ao *software* SWRC para ajuste dos parâmetros da curva de retenção estão apresentados na tabela (5.3), enquanto os parâmetros ajustados são apresentados nas tabelas (5.4) e (5.5), res-

Potencial Matricial (cm)	Umidade Volumétrica (cm ³ .cm ⁻³)	
	Horizonte	
	A	E
0	0,4446	0,398
100	0,113	0,088
300	0,103	0,080
500	0,094	0,066
800	0,079	0,055
1000	0,077	0,054
15000	0,054	0,033

Tabela 5.3: Relação entre o potencial matricial e a umidade volumétrica relativa aos horizontes A e E do solo estudado para ajuste de parâmetros da curva de retenção.

pectivamente. Vale salientar que os valores de umidade de saturação (θ_s) e umidade residual (θ_r) não foram obtidos por ajuste. Para o primeiro, θ_s , adotou-se o valor da porosidade total do solo estudado. Em seguida, o valor de θ_r foi obtido a partir dos dados de umidade residual de cada horizonte. Nesse caso, as amostras de TFSA apresentam uma umidade residual. Esse valor de umidade residual (em base de volume) foi considerado uma estimativa da umidade quando o solo está próximo da sucção de 1500 kPa (PMP).

Horizonte	α	θ_r	θ_s	n	R^2	AIC
A	0,94280	0,054	0,4446	1,3983	0,99806	-68,661
E	0,7775	0,033	0,398	1,4165	0,99821	-70,120

Tabela 5.4: Parâmetros para relações constitutivas de van-Genuchten em cada horizonte do perfil analisado.

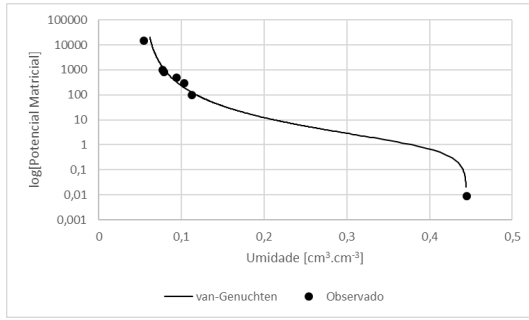
Horizonte	λ	θ_r	θ_s	h_b	R^2	AIC
A	0,39775	0,054	0,4446	1,0515	0,99806	-68,653
E	0,41607	0,033	0,398	1,2774	0,99820	-70,111

Tabela 5.5: Parâmetros para relações constitutivas de Brooks-Corey em cada horizonte do perfil analisado.

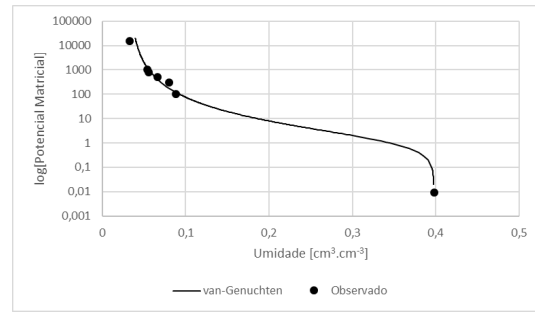
Nas duas últimas colunas das tabelas (5.4) e (5.5) são apresentados os coeficientes R^2 e AIC (Critério de Informação de Akaike), ambos são medidas que avaliam a qualidade de um modelo. Isto é, são parâmetros que indicam o quanto determinado ajuste foi capaz de aproximar os dados coletados. No caso de R^2 , este parâmetro é chamado coeficiente de determinação e varia entre 0 e 1. Dessa forma, quanto maior é o valor de R^2 , melhor é o ajuste que o modelo faz para a amostra de dados. Já o AIC, é um critério baseado no máximo da função de verossimilhança BOZDOGAN (1987) que busca, entre os modelos avaliados, aquele que minimize a divergência

de Kullback-Leibler (K-L). Neste caso, o modelo com menor AIC é considerado o melhor ajuste.

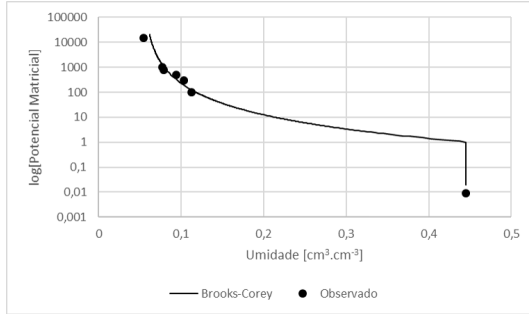
De posse desses comentários e analisando as tabelas (5.4) e (5.5), pode-se concluir que não há diferença entre os modelos de van-Genuchten e Brooks-Corey para o horizonte A, se o critério avaliado for apenas R^2 . Entretanto, levando-se em consideração o critério de Akaike, o modelo de van-Genuchten seria o escolhido por uma pequena diferença na segunda casa decimal. Avaliando os mesmos parâmetros para o horizonte E, o modelo de van-Genuchten também seria escolhido em ambos os critérios. Portanto, segundo essas análises e de forma preliminar, o modelo de van-Genuchten descreve melhor a curva de retenção para os dois horizontes considerados e, a princípio, será utilizado nas simulações computacionais.



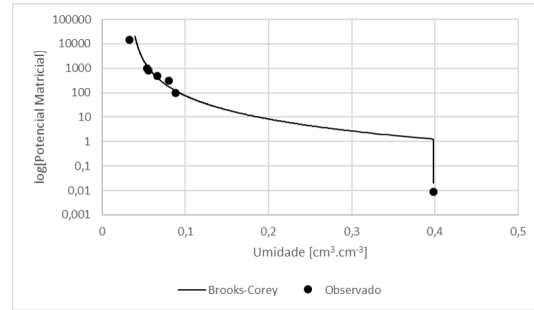
(a) Curva de retenção referente ao horizonte A, segundo modelo de van-Genuchten.



(b) Curva de retenção referente ao horizonte E, segundo modelo de van-Genuchten.



(c) Curva de retenção referente ao horizonte A, segundo modelo de Brooks e Corey.



(d) Curva de retenção referente ao horizonte E, segundo modelo de Brooks e Corey.

Figura 5.5: Curvas de retenção ajustadas em escala logarítmica no eixo das ordenadas.

5.2.3 Condutividade hidráulica saturada (K_s)

A tabela exibida na figura (5.6) mostra o valor da condutividade de saturação, parâmetro obtido através do permeâmetro de carga hidráulica constante, em amostras indeformadas do perfil de solo (TEIXEIRA *et al.*, 2017). Para este procedimento, três amostras indeformadas de cada horizonte foram coletadas através de um minicoletor tipo *Uhland*, anéis com dimensões de 5cm de altura e 5cm de

diâmetro. O valor de K_s foi obtido na unidade $[cm/min]$ e foi convertida para a unidade $[cm/s]$, para que estivesse em concordâncias com as unidades dos demais parâmetros e variáveis utilizadas neste trabalho.

É importante observar que há mais subdivisões de camadas para o perfil P2 do que as que foram enunciadas no início desta seção. Isto pode ser visto na tabela (5.6), em que são relatados os horizontes A, AE e E. Contudo, os horizontes A e AE são considerados como uma única camada, aqui denominada horizonte A, pois possuem propriedades semelhantes. Para retratar esta informação, o valor de K_s para o horizonte A foi considerado como a média ponderada (pelo comprimento de cada camada) dos valores de K_s para os horizontes A e AE, obtidos em laboratório. Isto é, para o valor de condutividade de saturação referente ao horizonte A, tem-se

$$K_s = \frac{[(8 - 0) * 0,01447] + [(22 - 8) * 0,02645]}{(8 - 0) + (22 - 8)} = 0,02209 \quad (5.3)$$

Horizonte	Profundidade (cm)	K_s (cm/min)	K_s (cm/s)	K_s Médio
A	0 à 8	0,86800	0,01447	0,02209
AE	8 à 22	1,58700	0,02645	
E	22 à 69	0,404	0,006733	0,006733

Tabela 5.6: Condutividade hidráulica saturada.

5.2.4 Condição inicial e de fronteira

No presente trabalho, para as simulações com dados de campo, optou-se, inicialmente, por utilizar condições de Dirichlet para as fronteiras. Isto corresponde a prescrever valores de potencial (ou umidade) nos limites superior e inferior da região estudada. A escolha por este tipo de condição de contorno foi possível porque os dados medidos em campo estavam disponíveis em todas as profundidades consideradas e em diversos tempos. A observação destas medidas possibilitou não só informar um valor constante para a condição de fronteira em $z = 0$, mas ajustar funções $\theta(z, t)$ que descrevessem a infiltração de água nos pontos $T = 0$ (condição inicial), $z = 22cm$ (condição de fronteira inferior do horizonte A e superior do horizonte E) e $z = 69cm$ (condição de fronteira inferior do horizonte E) do perfil de solo considerado.

De acordo com o aparato experimental descrito anteriormente, para a fronteira superior, manteve-se constante uma lâmina d'água tornando a superfície do solo saturada. Esta situação seria corretamente modelada adotando $h(0, t) = 2,5cm$, ou seja, a carga hidráulica colocada acima do solo estudado. Entretanto, não pretende-se, nesta pesquisa, abordar os fenômenos que ocorrem acima do solo, mas aqueles

que acontecem abaixo dele. Dessa forma, o efeito que a carga de $2,5\text{cm}$ causa na interface da fronteira superior, $z = 0$, foi considerado como o potencial máximo que o modelo computacional suportou. Isto quer dizer que a fronteira superior do solo está bem próximo da saturação, mas não está saturada porque a equação de Richards admite apenas fluxo não saturado, e que este potencial, dito máximo, será transmitido para as demais profundidades consideradas. Buscando atender a esta condição, adotou-se $h(0, t) = -0,165\text{cm}$ como o valor máximo de potencial matricial suportado pelo modelo, sem violar as condições da equação de Richards, e que será usado nas simulações computacionais. Este valor de potencial é referente ao modelo de van-Genuchten, mas segundo o modelo de Brooks-Corey será adotado o valor de $h(0, t) = -1,104\text{cm}$, pois ambos correspondem ao mesmo valor em termos de umidade volumétrica.

Testes preliminares foram realizados com condições de fronteira em função do potencial matricial. Porém resultados melhores foram obtidos ao informar para o código estas condições em função do teor de umidade. Assim, optou-se por trabalhar com condições de fronteira e inicial em função da umidade volumétrica. Então o valor adotado para a condição de fronteira superior é $\theta(0, t) = 0,437\text{cm}^3.\text{cm}^{-3}$, calculado para os valores de potencial mencionados no parágrafo anterior.

Para a fronteira inferior obteve-se, por medição, as umidades na profundidade $Z = 20\text{cm}$ para todos os tempos experimentais considerados. De posse destes valores, dois tratamentos foram realizados para a condição na fronteira $Z = 22$, que é a interface física entre os horizontes A e E. Primeiramente ajustou-se, por interpolação polinomial de grau 3, a equação (5.4) para $\theta = \theta(22, t)$, cujo gráfico é exibido na figura (5.6a). Optou-se por um polinômio de grau 3, pois este ajustou de forma considerável os pontos observados com $R^2 = 0,91788$, ou seja, aproximadamente 92% de precisão.

$$\theta(22, t) = 1,0999 \times 10^{-11}t^3 - 1,0622 \times 10^{-7}t^2 + 3,2115 \times 10^{-4}t + 7,0078 \times 10^{-2} \quad (5.4)$$

Analisando o gráfico da equação (5.4), apresentado na figura (5.6a), pode-se perceber que o ajuste feito está consideravelmente adiantado em relação aos dados observados nos intervalos de tempo $(0,600]$ e $(1800,3000)$. Já no intervalo $[900,1800)$ os dados interpolados por polinômio estão atrasados em relação aos observados.

Como forma de padronizar o grau dos polinômios interpoladores utilizados, para as condições de fronteira inferior (horizonte E) e inicial também foram adotados ajustes de grau 3 que podem ser vistos nas figuras (5.6b), (5.6c), (5.6d).

A condição de fronteira inferior referente ao horizonte E e exibida na figura (5.6b) possui a seguinte equação

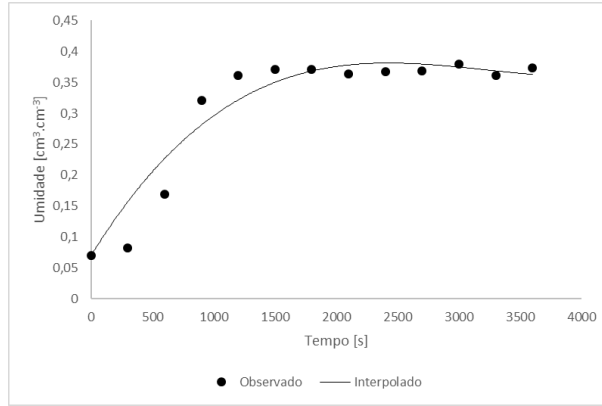
$$\theta(69, t) = -8,9117 \times 10^{-12}t^3 + 5,4396 \times 10^{-8}t^2 - 5,6450 \times 10^{-5}t + 2,5157 \times 10^{-1} \quad (5.5)$$

e ajusta os valores de umidade medidos em campo segundo um coeficiente de determinação $R^2 = 0,97028$. Isto é, a interpolação polinomial para esta condição de fronteira explica, aproximadamente, 97% dos dados de umidade volumétrica medidos em campo.

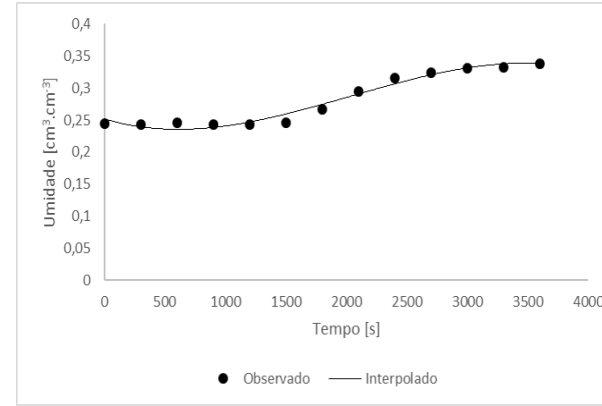
Os polinômios ajustados para as condições iniciais dos horizontes A e E podem ser vistos nas figuras (5.6c) e (5.6d). As funções que representam esses gráficos são expressas pelas equações (5.6) e (5.7), e apresentam coeficientes de determinação iguais a 1 e 0,98998, respectivamente. Optou-se por descrever esta condição por partes, pois expressando-a por uma única equação obtinha-se valores que desrespeitavam a física do fenômeno estudado.

$$\theta_A(z, 0) = 6,9268 \times 10^{-7} z^3 - 3,9452 \times 10^{-5} z^2 + 3,2525 \times 10^{-4} z + 7,4642 \times 10^{-2} \quad (5.6)$$

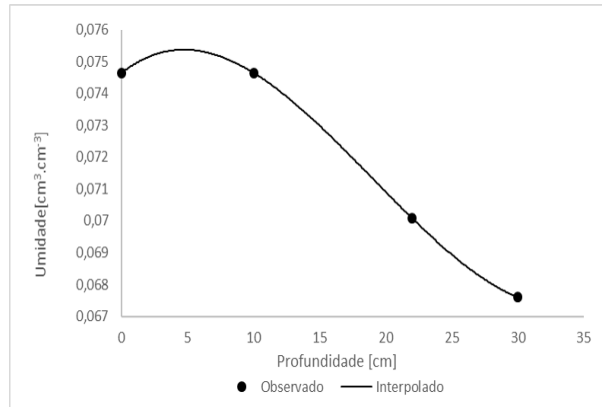
$$\theta_E(z, 0) = -6,9080 \times 10^{-6} z^3 + 9,8992 \times 10^{-4} z^2 - 3,9638 \times 10^{-2} z + 5,4108 \times 10^{-1} \quad (5.7)$$



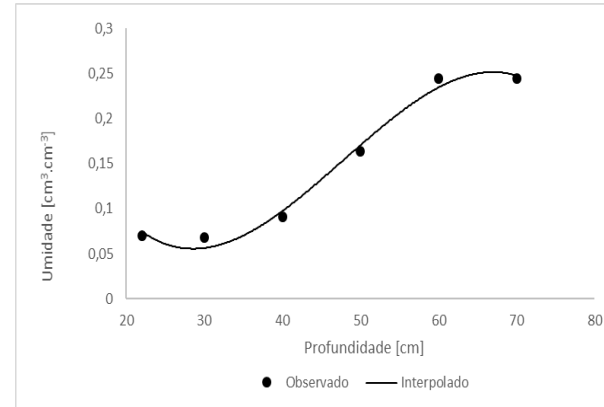
(a) Condição de fronteira inferior para o horizonte A e superior referente ao horizonte E.



(b) Condição de fronteira inferior referente ao horizonte E.



(c) Condição inicial referente ao horizonte A.



(d) Condição inicial referente ao horizonte E.

Figura 5.6: Condições adicionais para horizontes A e E interpoladas por polinômio de grau 3.

Ainda para as condições de fronteira e inicial foi feita outra análise considerando, para ajuste, funções do tipo sigmoide (SEBER e WILD, 2003). Estas são apresentadas na figura (5.7a) condição de fronteira inferior para o horizonte A e superior para o horizonte E, (5.7b) condição de fronteira inferior para o horizonte E e (5.7c) condição inicial para os horizontes A e E. As expressões que descrevem estes gráficos são dadas pelas equações (5.8), (5.9) e (5.10) apresentadas a seguir:

$$\theta(22, t) = 0,36934 - \frac{0,30091}{1 + e^{\frac{t-688,754}{130,138}}} \quad (5.8)$$

com $R^2 = 0,9979$,

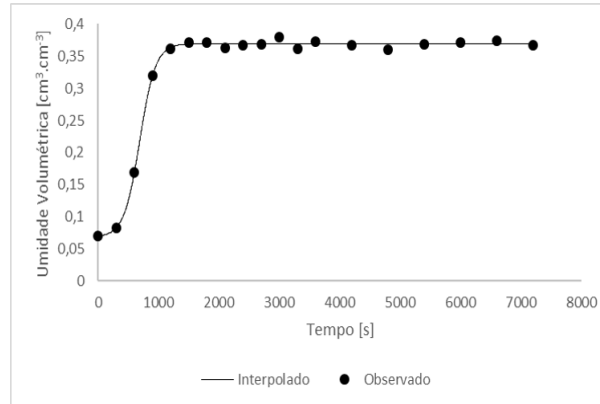
$$\theta(69, t) = 0,33347 - \frac{0,09069}{1 + e^{\frac{t-2057,68}{233,784}}} \quad (5.9)$$

com $R^2 = 0,9945$ e

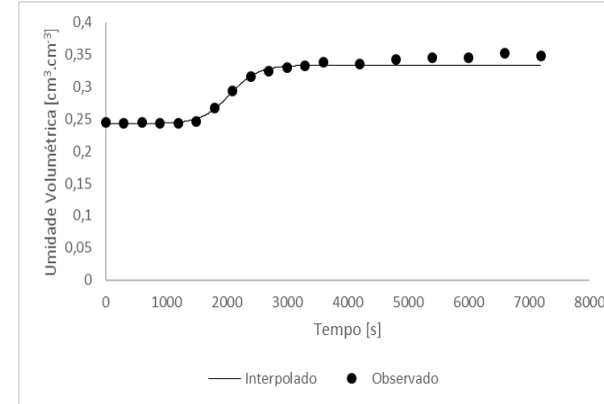
$$\theta(z, 0) = 0,24956 - \frac{0,17714}{1 + e^{\frac{z-49,571}{3,828}}} \quad (5.10)$$

com $R^2 = 0,99442$.

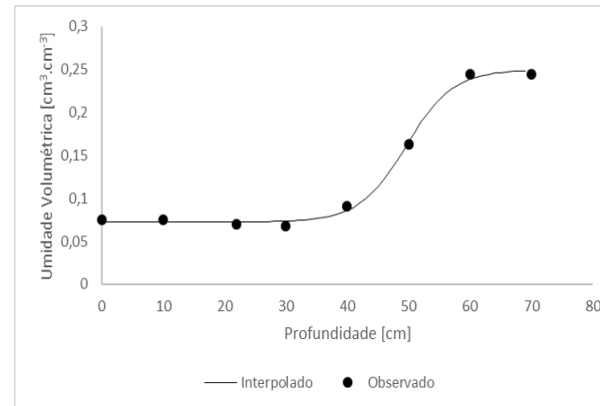
As vantagens dessa última abordagem, isto é, ajustando as condições inicial e de fronteira por uma sigmoide, foram duas; a saber: melhores valores de R^2 e poder trabalhar com uma única equação para a condição inicial, enquanto na interpolação anterior foram necessários dois polinômios, dividindo o domínio espacial nos intervalos $[0, 30]$ e $[30, 70]$.



(a) Condição de fronteira inferior para o horizonte A e superior referente ao horizonte E.



(b) Condição de fronteira inferior referente ao horizonte E.



(c) Condição inicial única para os dois horizontes.

Figura 5.7: Condições adicionais para horizontes A e E ajustadas por função sigmoidal.

5.3 Simulações: resultados e discussão

Os ensaios foram feitos usando apenas o esquema de discretização temporal implícito, considerando que não foi obtida condição de estabilidade para o esquema explícito. Além do *software* Octave, foi usado o *Hydrus* 1D para simulação e comparação com os dados observados em campo. Este *software* simula fluxo de água e calor e o movimento de solutos em meios porosos em variáveis bi e tridimensionais. As versões 2D e 3D são pagas, enquanto a versão 1D, usada neste trabalho é livre e, para mais detalhes, pode-se consultar (SIMUNEK *et al.*, 2008).

Ainda como relato de metodologia adotada, foi implementada, em ambiente Octave, uma rotina para cada horizonte e seus respectivos conjuntos de parâmetros para curva de retenção e condições inicial e de contorno. Assim, para o horizonte A, a malha espacial poderia variar no intervalo $z_A \in [0, 22]$ e, para o horizonte E, considerando o intervalo $z_E \in [22, 69]$. Além disso, o tempo de simulação considerado corresponde a 1 hora de infiltração e redistribuição de água no solo.

Mesmo trabalhando com rotinas distintas para cada horizonte, propõe-se aqui um estudo preliminar de acoplagem. Para isto, e com o objetivo de comparar os dados simulados com aqueles medidos pelo sensor TDR, calculou-se a média aritmética das umidades geradas pelo código nos intervalos $[0, 20]$, $[10, 30]$, $[20, 40]$, $[30, 50]$, $[40, 60]$ e $[50, 70]$ obtendo-se, assim, valores de umidade para comparação com os valores do TDR nas profundidades 10cm, 20cm, 30cm, 40cm, 50cm e 60cm, respectivamente. Este mesmo tratamento foi feito com os dados de saída do Hydrus, tendo em vista uniformizar os dados para comparação. Assim, o intervalo $[10, 30]$ corresponde à faixa de acoplamento entre os horizontes A e E, tratado, de forma preliminar, apenas pela média aritmética entre as saídas de código neste intervalo.

As condições de fronteira em $z = 22cm$ e $z = 69cm$, para ambos os horizontes, foram passadas para o código desenvolvido em Octave segundo as equações (5.4) e (5.5). O mesmo procedimento foi feito em relação às equações (5.6) e (5.7). Como este mesmo procedimento não pode ser feito no Hydrus, para este *software*, as condição de fronteira $\theta(22, t)$ e $\theta(69, t)$ foram preenchidas com respectivos dados pontuais medidos de 5 em 5 minutos, durante a primeira hora de experimento, nas profundidades $z = 20cm$ e $z = 60cm$.

Para todos os conjuntos de teste considerou-se, para as simulações referentes aos horizontes A e E, os passos temporal e espacial como $\Delta t_A = 1s$ e $\Delta z_A = 1cm$, $\Delta t_E = 1s$ e $\Delta z_E = 1cm$. Estas medidas foram necessárias já que, para os dados ajustados, a aproximação oscilava para Δt e Δz maiores.

5.3.1 Ensaio 1: Ajuste polinomial e modelo de van-Genuchten para curva de retenção

Neste ensaio foram utilizados os ajustes polinomiais e curvas de retenção e condutividade de (VAN GENUCHTEN, 1980). As saídas estão na figura (5.8), onde é possível perceber que a infiltração de água no solo é descrita pelas simulações até a profundidade $z = 30cm$. Para as demais profundidades não há passagem de água ainda que a umidade na fronteira superior seja equivalente à saturação. Em $z = 10$ e $20cm$, a umidade simulada acompanha o comportamento daquela observada em campo, ainda que superestimando, em alguns momentos, tendo em vista que a condição de contorno fornecida é maior do que aquela atingida em campo. A partir da profundidade $z = 30cm$ os resultados simulados começam a subestimar aqueles medidos em campo, ficando atrasados. Por fim, nas profundidades $z = 40, 50$ e $60cm$, segundo os dados obtidos em simulação, não há mais passagem de água. De fato, os resultados permanecem os mesmos em todos os tempos considerados.

Se comparado com o Hydrus, o modelo aqui proposto tem comportamento similar. Ainda assim, ambos os modelos de simulação não retratam a transferência de água para as profundidades $z = 40, 50$ e $60cm$ e retratam pouca passagem de água em $z = 30cm$, ao longo de todos os tempos.

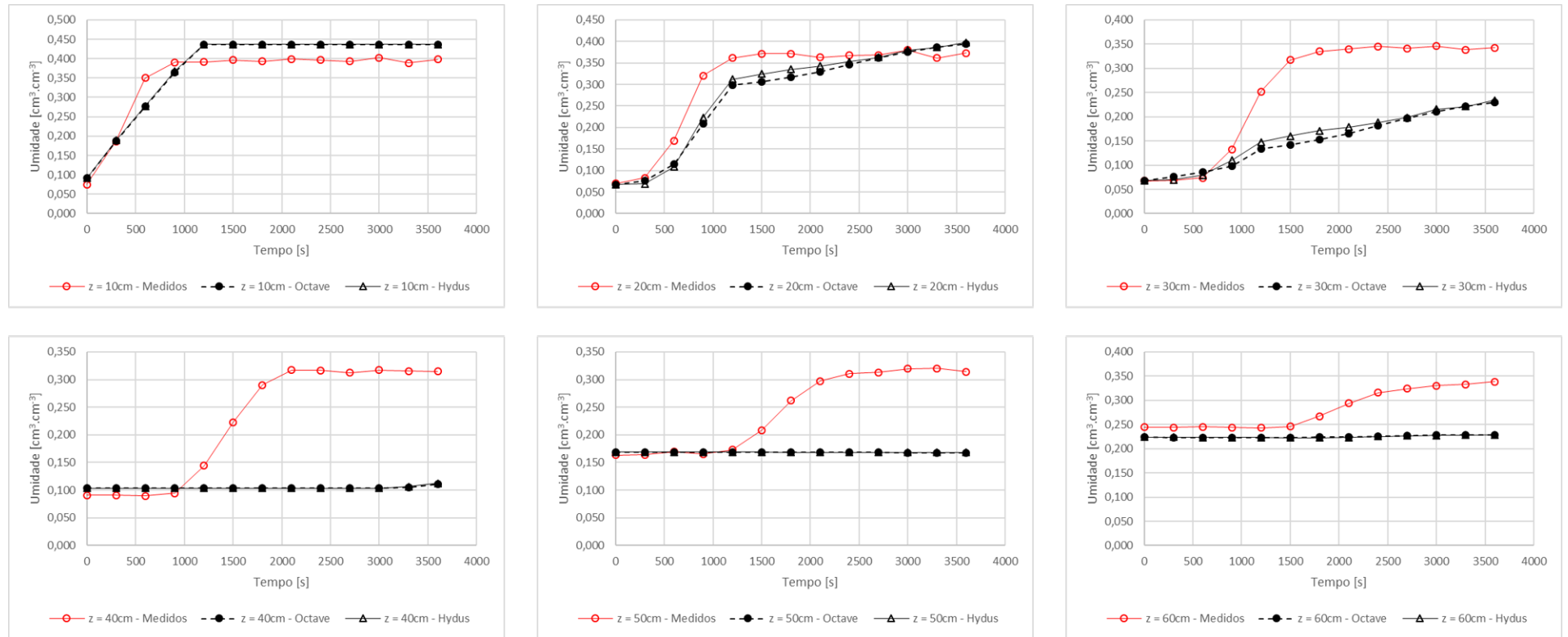


Figura 5.8: Variação da umidade com a profundidade e com o tempo. Comparação entre dados observados em campo e obtidos por simulação nos *softwares* Octave e Hydrus 1D, utilizando modelo de van-Genuchten para curva de retenção. Condições inicial e de fronteira dos horizontes A e E variando com o tempo por interpolação polinomial.

5.3.2 Ensaio 2: Ajuste sigmoidal e modelo de van-Genuchten para curva de retenção

Neste ensaio, buscando-se sanar os problemas relatados no anterior, fez-se uso das interpolações não polinomiais, descritas pelas equações (5.8), (5.9), (5.10), condições de fronteira e inicial dos horizontes A e E. Neste teste, assim como no anterior, apenas a condição de fronteira superior do horizonte A é constante, $\theta(0, t) = 0,437 \text{ cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$.

A figura (5.9) mostra o mesmo comportamento visto no teste anterior em relação aos dados de campo. Nos primeiros 10cm de profundidade, o *software* Hydrus e o código em Octave, descrevem o mesmo comportamento e continuam superestimando a transmissão de água no solo. Em 20 e 30cm, as simulações acompanham o mesmo comportamento observado em campo, ainda que com atrasos. A partir de 40cm não há mais transmissão de água, este comportamento permanece durante todos os tempos considerados para simulação. Mesmo apresentando um comportamento ruim em relação aos dados de campo, os resultados obtidos considerando o ajuste não polinomial para condições de fronteira e inicial estão mais próximos das soluções dadas pelo Hydrus.

Os resultados anteriores são importantes, mas o observado nos testes da figura (5.9) é que não há fluxo de água para as profundidades 40, 50 e 60cm. Tendo em vista solucionar este problema, e considerando que o fluxo de água é produto da condutividade e do gradiente hidráulico, e que não havia alterações a serem feitas no que diz respeito ao gradiente hidráulico nas condições de fronteira, efetuou-se uma avaliação sobre os valores de condutividade hidráulica utilizados.

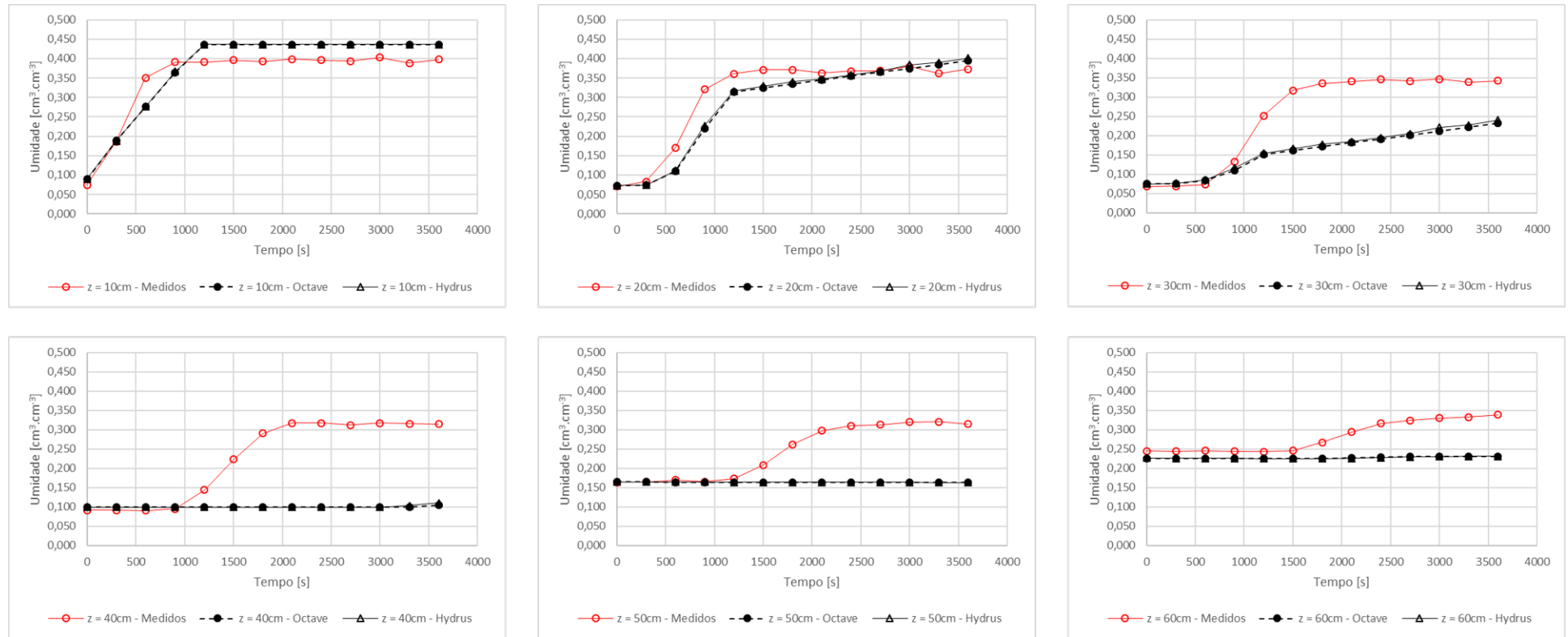


Figura 5.9: Variação da umidade com a profundidade e com o tempo. Comparação entre dados observados em campo e obtidos por simulação nos *softwares* Octave e Hydrus 1D, utilizando modelo de van-Genuchten para curva de retenção. Condições inicial e de fronteira dos horizontes A e E variando com o tempo por ajuste sigmoidal.

5.3.3 Análise da condutividade hidráulica

Tendo em vista sanar o problema relatado na seção anterior, procurou-se analisar se outros modelos de ajuste à curva de retenção de umidade poderiam apresentar estimativas diferentes de condutividade hidráulica e que resultasse em melhor predição do fluxo de água nas camadas 40, 50 e 60 cm. Para isto, foram calculados os valores de $K = K(\theta)$, em que os valores de umidade, $\theta = \theta(z, t)$, foram obtidos nas medições feitas em campo. Esta análise comparou as condutividades hidráulicas descritas através dos modelos de (VAN GENUCHTEN, 1980) e (BROOKS e COREY, 1964), segundo as equações (2.27) e (2.20), respectivamente.

Os resultados obtidos nesta verificação, para ambos os modelos, foram plotados em um mesmo gráfico e podem ser vistos na figura (5.10). Assim, é possível notar que os valores de condutividade hidráulica calculados pelo modelo de (BROOKS e COREY, 1964) eram bem superiores ao de (VAN GENUCHTEN, 1980). Este último chegando a ser 10 vezes menor do que o primeiro, na profundidade 40cm, nos tempos 2100s (35min), 2400s (40min) e 3000s (50min). De fato, este comportamento ocorre nas profundidades 40, 50 e 60cm, principalmente nos tempos finais de simulação, nos quais pretende-se que a transmissão de água seja maior.

De posse destes conhecimentos, pode-se concluir que não basta apenas considerar critérios como o de Akaike (AIC) ou o coeficiente de determinação (R^2) para avaliar se um modelo descreve bem a curva de retenção do fenômeno estudado. Se apenas estes critérios fossem considerados, optaria-se unicamente pelo modelo de van-Genuchten e o resultado obtido seria bastante atrasado em relação aos dados de medições. Entretanto, verifica-se aqui que é importante avaliar o modelo que descreve também a condutividade hidráulica, $K = K(\theta)$, pois este também influencia no atraso (ou não) dos resultados obtidos pelo modelo numérico. Dessa forma, os testes já feitos, e mostrados nas figuras (5.8) e (5.9), foram repetidos, descrevendo a curva de retenção da água no solo através do modelo de (BROOKS e COREY, 1964).

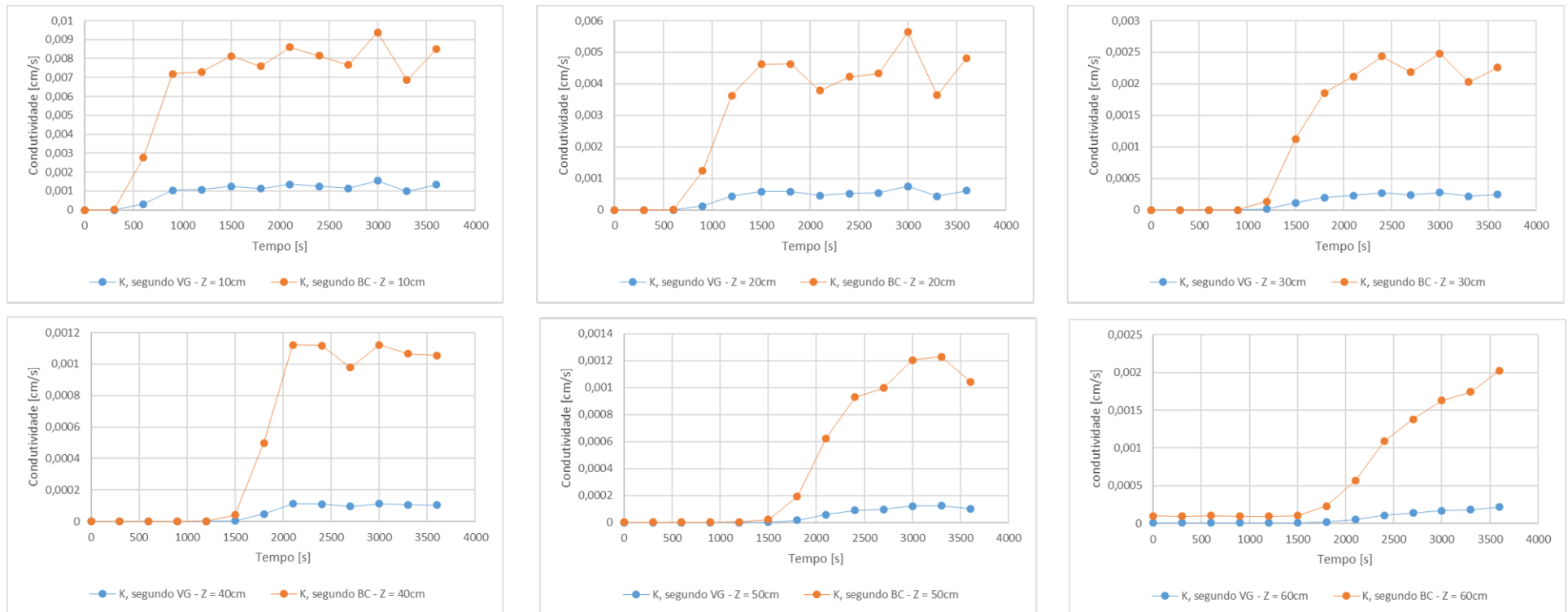


Figura 5.10: Comparação entre as condutividades hidráulicas, descritas pelo método de Mualem para as curvas de van-Genuchten e Brooks-Corey, calculadas em função do teor de umidade medido em campo.

5.3.4 Ensaio 3: Ajuste polinomial e modelo de Brooks e Corey para curva de retenção

Neste ensaio são utilizadas curvas de retenção de (BROOKS e COREY, 1964) e condutividade descrita por (MUALEM, 1976) para este modelo, além disto, os ajustes para condições de contorno e inicial foram os polinomiais, descritos pelas equações (5.4), (5.5), (5.6) e (5.7). Os resultados estão na figura (5.11).

Pode-se perceber que, nestes testes, todas as profundidades foram contempladas com fluxo de água. Isto porque o modelo considerado, descreve uma condutividade maior do que o anterior, permitindo, assim, que o teor de umidade seja drenado para as demais profundidades, não só para as mais superficiais.

Este modelo aumenta a qualidade de aproximação para as profundidades $z = 20$ e 30cm , basta comparar as imagens referentes a estas profundidades nas figuras (5.8) e (5.11). Este fato se deve à maior dissipação de água, fazendo com que mais umidade atinja essas profundidades em menos tempo, fazendo com que os valores aproximados estejam mais próximos dos valores reais. Ainda que as simulações tenham melhorado, elas ainda estão atrasadas em relação aos dados de campo.

Em comparação com as simulações feitas com o Hydrus, pode-se perceber que os testes referentes ao Octave estão atrasados, porém acompanham o mesmo comportamento. Além disso, ambas as saídas, se comparadas com os dados observados em campo, possuem diferenças. Por exemplo, na figura (5.11), no quadro que representa os 40cm de profundidade, os dados de campo chegam à umidade máxima em $T = 40\text{min}$, enquanto as simulações alcançam esta mesma umidade em $T = 50\text{min}$, isto é, 10min de atraso. Na profundidade $z = 50\text{cm}$ este fato se repete, mantendo o atraso de 10min entre os dados observados e os simulados pelo Octave. Este atraso aumenta para 20min na profundidade $z = 60\text{cm}$. As simulações feitas no Hydrus apresentam um atraso 5min menor do que aquelas feitas no Octave, em relação aos dados de campo.

A grande vantagem observada na mudança de modelo para curva de retenção é fazer com que o fluxo de água se estenda até os níveis mais profundos. Isto retrata de forma mais precisa o cenário descrito em campo, se comparado aos testes iniciais feitos com o modelo de van-Genuchten. Mostrando que o modelo de Brooks-Corey descreve melhor as condições do solo estudado.

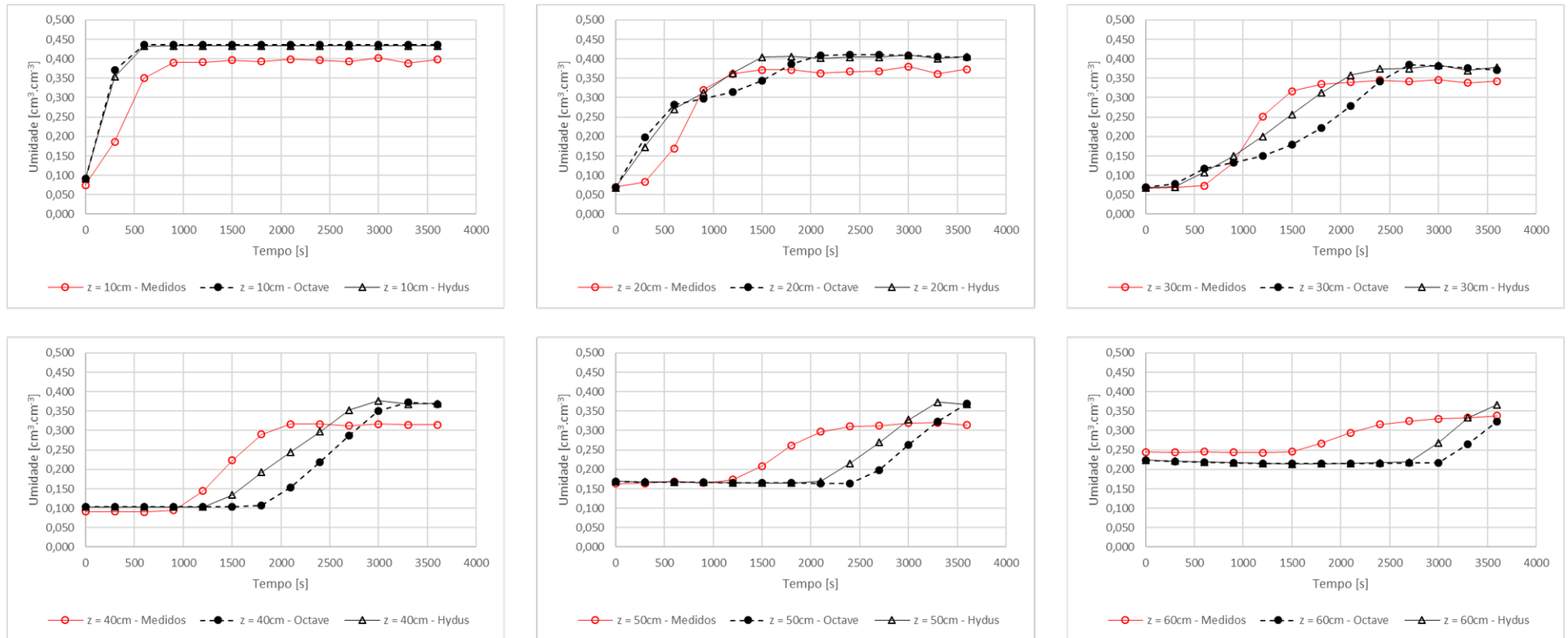


Figura 5.11: Variação da umidade com a profundidade e com o tempo. Comparação entre dados observados em campo e obtidos por simulação nos *softwares* Octave e Hydrus 1D, utilizando modelo de Brooks-Corey para curva de retenção. Condições inicial e de fronteira dos horizontes A e E variando com o tempo por interpolação polinomial.

5.3.5 Ensaio 4: Ajuste sigmoidal e modelo de Brooks e Corey para curva de retenção

Para obter os resultados exibidos na figura (5.12), considerou-se a equação (5.8) para descrever as fronteiras inferior do horizonte A e superior do horizonte E ($z = 22cm$). Além disso, as equações (5.9) e (5.10) descreveram a condição de fronteira na profundidade $z = 69$, a condição inicial dos horizontes A e E, respectivamente.

Nestes testes chega-se a uma melhor aproximação, principalmente para a profundidade $z = 20cm$. Além disso, há melhora na aproximação para $z = 30cm$, se comparados os dados obtidos em campo com aqueles simulados no Octave e no Hydrus e apresentados nas figuras (5.11) e (5.12). Esta proposta de ajuste por uma sigmoide para condições de fronteira e inicial incorporada ao uso do modelo de Brooks-Corey para curva de retenção melhora as aproximações feitas no Octave em $5min$, se comparada às simulações feitas com interpolação polinomial. Comparando os modelos de van-Genuchten, na figura 5.10, e Brooks-Corey, figura (5.12), este último retorna melhores resultados para o solo estudado, isto é, de acordo com os resultados de simulações, o modelo de Brooks-Corey descreve melhor o solo estudado.

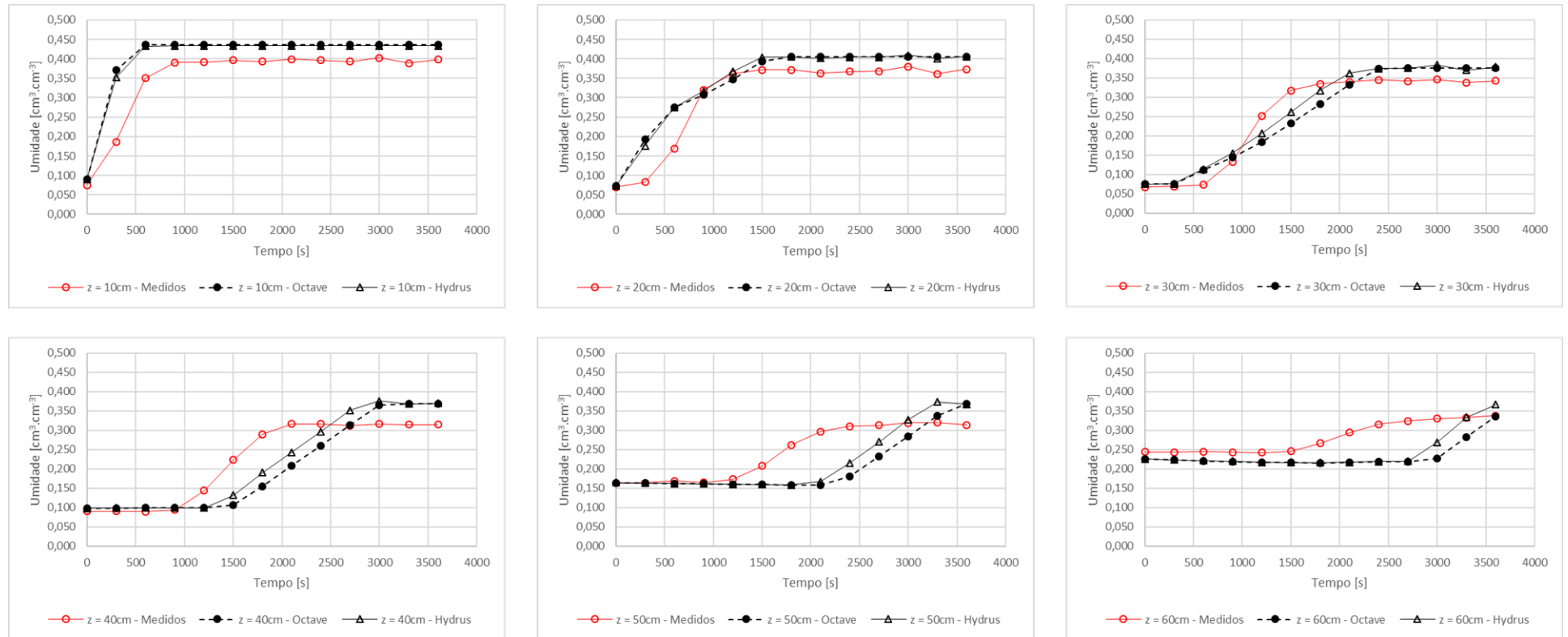


Figura 5.12: Variação da umidade com a profundidade e com o tempo. Comparação entre dados observados em campo e obtidos por simulação nos *softwares* Octave e Hydrus 1D, utilizando modelo de Brooks-Corey para curva de retenção. Condições inicial e de fronteira dos horizonte A e E variando com o tempo por ajuste sigmoidal.

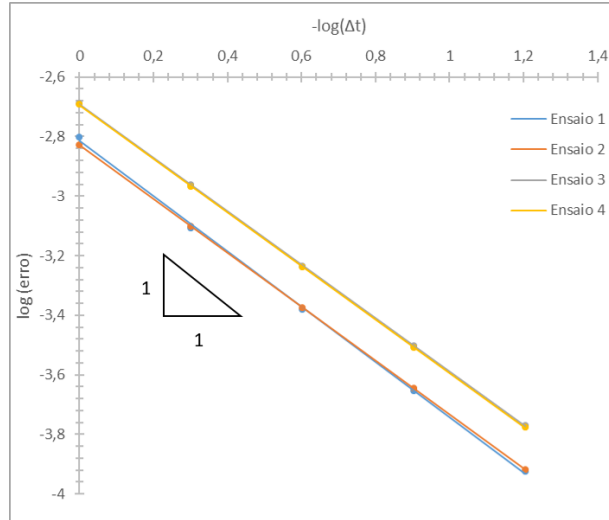
5.3.6 Estudo de convergência

Segundo (FERZIGER *et al.*, 2019), para problemas não lineares que são fortemente influenciados por condições de contorno a convergência de um método numérico é difícil de demonstrar. De fato, o problema em questão se enquadra nesta especificação. Nesses casos, a convergência é verificada usando experimentos numéricos, isto é, repetindo, sucessivamente, a implementação para uma série de grades refinadas (FERZIGER *et al.*, 2019). Este foi o procedimento adotado para verificar a convergência do método apresentado neste estudo.

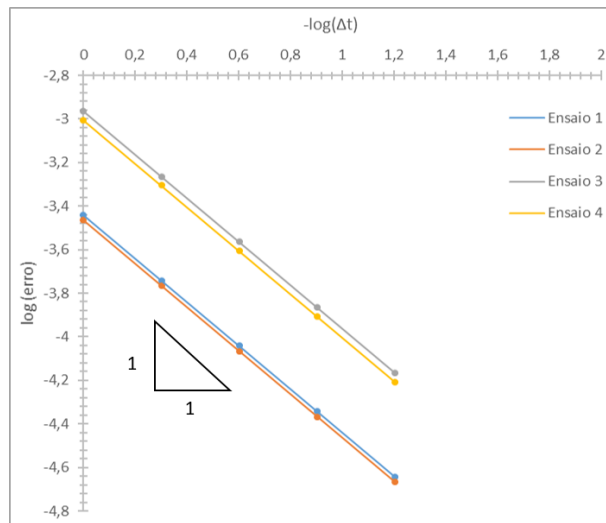
Dessa forma, para cada um dos horizontes estudados, fixou-se a malha espacial com $\Delta z = 1cm$ e, para a malha temporal foram estabelecidos os seguintes passos $\Delta t = 1; 0,5; 0,25; 0,125$ e $0,0625s$. O erro relativo cometido em cada simulação, para cada um dos Δt especificados, foi calculado da seguinte forma

$$||\bar{e}|| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\theta_i^{j+1} - \theta_i^j)^2}{\sum_{i=1}^n (\theta_i^{j+1})^2}}. \quad (5.11)$$

Assim, foram obtidos os pontos $(\Delta t, ||\bar{e}||)$. As informações desta análise, em escala logarítmica, para cada um dos horizontes estudados é apresentada na figura (5.13). Para ambos os horizontes, A e E, a linha de tendência com coeficiente angular igual a 1 mostra a ordem do erro de truncamento esperada para o esquema de discretização temporal, $O(\Delta t) = 1$. Este comportamento se repete em todos os quatro ensaios propostos, comprovando que o método numérico converge, ao longo das iterações, para os dois modelos de curva de retenção usados e também para as duas formas de descrever as condições de fronteira e inicial (polinomial e sigmoidal).



(a) Horizonte A



(b) Horizonte E

Figura 5.13: Estudo de convergência para as soluções aproximadas $\theta(z_i, t_j)$, considerando os passos de tempo $\Delta t = 1; 0,5; 0,25; 0,125$ e $0,0625s$.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta dissertação foram apresentados, basicamente, todos os aspectos de um trabalho em modelagem matemática: o estudo do fenômeno, a escolha da abordagem matemática (EDP), o tratamento numérico computacional e experimento de campo, fundamental, para a calibração e futura validação do modelo. Em cada um destes tópicos uma janela de possibilidades foi aberta e muitas escolhas foram feitas, todas aqui bem fundamentadas. Deve ser destacado que todo este trabalho é a resultante das muitas decisões tomadas em conjunto e em grupo de pesquisa multidisciplinar.

Para o fenômeno água no solo, em função das muitas justificativas aqui apresentadas, foi escolhida a modelagem clássica e através da equação de Richards. Sua resolução numérica, na busca do balanço de massa, foi através de volumes finitos, com aproximação temporal através de método implícito, da ordem do passo no tempo.

O objetivo das simulações era trabalhar com solo heterogêneo, aqui configurado com duas camadas. E as comparações foram realizadas tanto com os dados de campo quanto com as saídas do *software* Hydrus 1D, bastante respeitado na área de física do solo.

A implementação em código octave, com volumes finitos, método implícito e não linearidade tratada pelo método de Picard, foi, inicialmente, testada com dados da literatura e obteve resultados esperados.

Com a oportunidade de participar e acompanhar de perto o desenvolvimento de um experimento de campo, especialmente desenhado para obtenção de dados, e as etapas desenvolvidas em laboratório, para a obtenção de parâmetros fundamentais da equação, muitos questionamentos, para além dos recolhidos na literatura, ocorrem. Como considerar a condição inicial? Que condições de fronteira considerar? Qual curva de retenção adotar? Como será a passagem das informações entre as camadas do solo?

Os dados de campo permitem escolhas tais como as “reais” condições inicial e de fronteiras. Por isso, foram consideradas aqui apenas condições de Dirichlet. Mas,

visando a prática, condições de Neumann (drenagem livre) no fundo do perfil devem ser consideradas em trabalho futuro.

Dados de laboratório informaram a relação umidade versus potencial hidráulico, responsável pela busca e obtenção da curva de retenção. Mas índices de qualidade de ajuste de tais curvas, tais como R^2 e AIC, não foram suficientes para a melhor escolha. De fato, ao utilizar apenas a melhor escolha para a curva de retenção (curva de Van Genutchem), os resultados das simulações e suas comparações (octave versus hydrus versus dados de campo) apresentaram atrasos consideráveis. Além disto, pelas saídas computacionais, tanto do hydrus quanto do código aqui desenvolvido, a água não era transmitida para as camadas inferiores, contrariando o que ocorreu em campo.

Para contornar os problemas relatados anteriormente foram observados os dados da condutividade hidráulica. Para tal foram comparadas as fórmulas de Van Genutchem e de Brooks e Corey e o que saltou aos olhos, nos gráficos aqui disponibilizados, foi que a justificativa para a não transmissão da água para as camadas inferiores foi detectada. Não basta buscar a melhor curva de retenção, a informação da condutividade que melhor se ajusta ao solo estudado deve ser considerada.

Fazendo a escolha pelo modelo de Brooks e Corey a água foi distribuída para as demais profundidades e os atrasos foram reduzidos, quando o ajuste para as condições iniciais e de fronteira foram melhorados.

A convergência temporal pretendida é atingida e isto foi verificado na análise de convergência apresentada. Portanto, uma tentativa futura de se reduzir os atrasos e diferenças entre as simulações é aumentar a ordem de convergência do método de discretização temporal, utilizando, por exemplo, o esquema de Cranck-Nicolson, da ordem de Δt^2 .

Uma outra mudança que pode ser proposta, no intuito de melhorar os resultados como um todo, seria alterar o tratamento da não linearidade utilizando, por exemplo, o método de Newton ou um esquema de preditor-corretor.

E, concluindo, é preciso observar que, no decorrer do trabalho, foram mencionados outros dois perfis, P5 e P7, além de P2, porém nada foi mencionado sobre os resultados experimentais e suas utilizações nas simulações. Para o perfil P2 haviam dados necessários para a obtenção da curva de retenção, que levam tempo para serem obtidos, mas para os demais não. Apesar de tais perfis serem taxonomicamente similares ao perfil P2, aquele usado para gerar todos os resultados aqui apresentados, a utilização da mesma curva de retenção, com os mesmos parâmetros, não foi suficientemente testada em conjunto com as demais condições. Uma evolução natural deste trabalho é resgatar estes testes e validar o modelo para outros perfis.

Referências Bibliográficas

- BOZDOGAN, H., 1987, “Model selection and Akaike’s Information Criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions”, *Psychometrika*, v. 52, n. 3 (sep), pp. 345–370.
- BROOKS, R., COREY, A., 1964, *Hydraulic properties of porous media*. Fort Collins, Colorado : Colorado State University.
- BUCKINGHAM, E., 1907, “Studies on the movement of soil moisture”, *U. S. Dept. Agric. Bur. Soils Bull.*, v. 38.
- CAMPBELL, G. S., 1974, “A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data”, *Soil science*, v. 117, n. 6, pp. 311–314.
- CAPUTO, H. P., 1996, “Mecânica dos solos e suas aplicações”. In: *Mecânica dos solos e suas aplicações*, LTC.
- CAVIEDES-VOULLIÈME, D., GARCI, P., MURILLO, J., et al., 2013, “Verification, conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1D Richards equation”, *Journal of hydrology*, v. 480, pp. 69–84.
- CELIA, M. A., BOULOUTAS, E. T., ZARBA, R. L., 1990, “A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation”, *Water resources research*, v. 26, n. 7, pp. 1483–1496.
- CICHOTA, R., VAN LIER, J., OTHERS, 2002, “Calibração no campo de um equipamento de TDR segmentado”, *Anais*.
- COELHO, E. F., VELLAME, L. D. M., COELHO FILHO, M. A., et al., 2006, “Desempenho de modelos de calibração de guias de onda acopladas a TDR e a multiplexadores em três tipos de solos”, *Revista brasileira de ciência do solo*, v. 30, n. 1, pp. 23–30.

- DARCY, H., 1856, “Les fontaines publiques de la ville de Dijon, Dalmont”, *Paris: Dalmont*.
- DE LACERDA, R. D., GUERRA, H. O. C., JUNIOR, G. B., et al., 2005, “Avaliação de um TDR para determinação do conteúdo de água do solo”, *Revista de Biologia e Ciências da Terra*, v. 5, n. 1, pp. 0.
- DELANDA, M., 2013, *Intensive science and virtual philosophy*. Bloomsbury Publishing.
- DOS SANTOS, M. R., ZONTA, J. H., MARTINEZ, M. A., 2010, “Influência do tipo de amostragem na constante dielétrica do solo e na calibração de sondas de TDR”, *Revista Brasileira de Ciência do Solo*, v. 34, n. 2, pp. 299–307.
- DURNER, W., 1994, “Hydraulic conductivity estimation for soils with heterogeneous pore structure”, *Water resources research*, v. 30, n. 2, pp. 211–223.
- EATON, J. W., BATEMAN, D., HAUBERG, S., et al., 2020, “A high-level interactive language for numerical computations”, *Bristol, United Kingdom*.
- EDELSTEIN-KESHET, L., 2005, *Mathematical Models in Biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- EYMARD, R., GUTNIC, M., HILHORST, D., 1999, “The finite volume method for Richards equation”, *Computational Geosciences*, v. 3, n. 3-4, pp. 259–294.
- EYMARD, R., GALLOUËT, T., HERBIN, R., et al., 2001, “Approximation by the finite volume method of an elliptic-parabolic equation arising in environmental studies”, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 11, n. 09, pp. 1505–1528.
- FARTHING, M. W., OGDEN, F. L., 2017, “Numerical Solution of Richards’ Equation: A Review of Advances and Challenges”, *Soil Science Society of America Journal*.
- FERZIGER, J. H., PERIC, M., STREET, R. L., et al., 2019, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag GmbH. ISBN: 978-3-319-99691-2.
- FORSYTH, P. A., WU, Y., PRUESS, K., 1995, “Robust numerical methods for saturated-unsaturated flow with dry initial conditions in heterogeneous media”, *Advances in Water Resources*, v. 18, n. 1, pp. 25–38.

- HAVERKAMP, R., VAUCLIN, M., TOUMA, J., et al., 1977, “A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration 1”, *Soil Science Society of America Journal*, v. 41, n. 2, pp. 285–294.
- HIRSCH, C., 2007, *Numerical computation of internal and external flows : fundamentals of computational fluid dynamics*. Elsevier/Butterworth-Heinemann.
- IÓRIO, V., 2016, “EDP um curso de graduação “Coleção matemática universitária””, *Instituto de Matemática Pura e Aplicada*.
- ISAACSON, E., HERBERT, B. K., 2012, *Analysis of Numerical Methods*. Guilford Publications.
- JÚNIOR, J., OLIVEIRA, G., 2003, *Desempenho do reflectômetro no domínio do tempo na detecção de variações de umidade do solo*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo.
- KER, J., 2015, *Pedologia : Fundamentos*. Viçosa - Minas Gerais, Sociedade Brasileira de Ciência do Solo.
- KLAR, A., 1988, *A água no sistema solo-planta-atmosfera*. Sao Paulo, Nobel.
- KOSUGI, K., 1996, “Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties”, *Water Resources Research*, v. 32, n. 9, pp. 2697–2703.
- KUMAR, C., 1998, “A numerical simulation model for one-dimensional infiltration”, *ISH Journal of Hydraulic Engineering*, v. 4, n. 1, pp. 5–15.
- LAI, W., OGDEN, F. L., 2015, “A mass-conservative finite volume predictor–corrector solution of the 1D Richards’ equation”, *Journal of Hydrology*, v. 523, pp. 119–127.
- LAX, P. D., RICHTMYER, R. D., 1956, “Survey of the stability of linear finite difference equations”, *Communications on pure and applied mathematics*, v. 9, n. 2, pp. 267–293.
- LEHMANN, F., ACKERER, P., 1998, “Comparison of iterative methods for improved solutions of the fluid flow equation in partially saturated porous media”, *Transport in porous media*, v. 31, n. 3, pp. 275–292.
- LEPSCH, I., 2011, *19 lições de pedologia*. São Paulo, Oficina de Textos.
- LIBARDI, P., 2005, *Dinâmica da água no solo*. São Paulo, Edusp.
- LIMA, E. L., 2004, “Curso de Análise Vol 1. 11a edição”, *Rio de Janeiro: IMPA*.

- MALISKA, C., 2004, *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. Rio de Janeiro, Livros Tecnicos e Científicos.
- MANNICH, M., 2009, *Desenvolvimento de soluções analíticas e numéricas da Equação de Richards*. Tese de Mestrado, UFPR. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambientais, Paraná.
- MANUAL-TDR, 2017. “User Manual TRIME-PICO T3/IPH44 and T3/IPH50”. Disponível em: [<https://www.imko.de/en/technical-documentation/>](https://www.imko.de/en/technical-documentation/).
- MANZINI, G., FERRARIS, S., 2004, “Mass-conservative finite volume methods on 2-D unstructured grids for the Richards’ equation”, *Advances in Water Resources*, v. 27, n. 12, pp. 1199–1215.
- MARQUARDT, D. W., 1963, “An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters”, *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 11, n. 2, pp. 431–441.
- MUALEM, Y., 1976, “A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media”, *Water resources research*, v. 12, n. 3, pp. 513–522.
- NEVES, M. C. P., GUERRA, J. G. M., CARVALHO, S. D., et al., 2005, “Sistema integrado de produção agroecológica ou fazendinha agroecológica do km 47”, *Agroecologia: princípios e técnica para uma agricultura orgânica sustentável*. Brasília: Embrapa-Informação Tecnológica, pp. 147–172.
- NIMMO, J. R., LANDA, E. R., 2005, “The soil physics contributions of Edgar Buckingham”, *Soil Science Society of America Journal*, v. 69, n. 2, pp. 328–342.
- OGDEN, F. L., ALLEN, M. B., LAI, W., et al., 2017, “The soil moisture velocity equation”, *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, v. 9, n. 2, pp. 1473–1487.
- OR, D., WRAITH, J. M., TULLER, M., 1997, “Agricultural and environmental soil physics”, *Logan, Utah State University*.
- PANDAY, S., HUYAKORN, P. S., THERRIEN, R., et al., 1993, “Improved three-dimensional finite-element techniques for field simulation of variably saturated flow and transport”, *Journal of contaminant hydrology*, v. 12, n. 1-2, pp. 3–33.

- PANICONI, C., PUTTI, M., 1994, “A comparison of Picard and Newton iteration in the numerical solution of multidimensional variably saturated flow problems”, *Water Resources Research*, v. 30, n. 12, pp. 3357–3374.
- PHILIP, J. R., 1969, “Theory of infiltration”. In: *Advances in hydroscience*, v. 5, Elsevier, pp. 215–296.
- POULSEN, T. G., MOLDRUP, P., IVERSEN, B. V., et al., 2002, “Three-region Campbell model for unsaturated hydraulic conductivity in undisturbed soils”, *Soil Science Society of America Journal*, v. 66, n. 3, pp. 744–752.
- PREVEDELLO, C. L., LOYOLA, J. M. T., SANTOS, C. M., et al., 2002, “Solucao numérica para o processo da infiltração da água no solo”, *Scientia Agraria*, v. 3, n. 1, pp. 29–39.
- QUEIRÓZ, B. F., 2017, *Estudo de soluções numéricas da equação de Richards através do método de elementos finitos e diferenças finitas para simulação de fluxo unidimensional em solo não-saturado*. Tese de Mestrado, UFRRJ. Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Rio de Janeiro.
- REICHARDT, K., 1985, *Processos de transferência no sistema solo-planta-atmosfera*. Fundação Cargill.
- REICHARDT, K., 1987, *A água em sistemas agrícolas*. São Paulo, Manole.
- REICHARDT, K., TIMM, L. C., 2004, *Solo, planta e atmosfera: conceitos, processos e aplicações*. Manole Barueri.
- RICHARDS, L., 1949, “Methods of measuring soil moisture tension”, *Soil science*, v. 68, n. 1, pp. 95.
- RICHARDS, L. A., 1931, “Capillary conduction of liquids through porous mediums”, *physics*, v. 1, n. 5, pp. 318–333.
- ROSS, P., PARLANGE, J.-Y., 1994, “Comparing exact and numerical solutions of Richards equation for one-dimensional infiltration and drainage”, *Soil science*, v. 157, n. 6, pp. 341–344.
- SANTOS BRANDÃO, V. D., PRUSKI, F. F., SILVA, D. D. D., 2004, *Infiltration of water in soil*. N. 02. Viçosa, Brazil, Editora UFV, Universidade Federal de Viçosa.
- SEBER, G. A., WILD, C. J., 2003, “Nonlinear Regression. Hoboken”, *New Jersey: John Wiley & Sons*, v. 62, pp. 63.

- SEKI, K., 2007, “SWRC fit—a nonlinear fitting program with a water retention curve for soils having unimodal and bimodal pore structure”, *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*, v. 4, n. 1, pp. 407–437.
- SILVA, E. L. D., GERVÁSIO, E. S., 1999, “Uso do instrumento TDR para determinação do teor de água em diferentes camadas em um latossolo roxo distrófico”, *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v. 3 (12), pp. 417 – 420.
- SIMUNEK, J., SEJNA, M., VAN GENUCHTEN, M. T., 1998, “HYDRUS-1D”, *Simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media, version*, v. 2.
- SIMUNEK, J., VAN GENUCHTEN, M., SEJNA, M., 2008, “Development and applications of the HYDRUS and STANMOD software packages and related codes”, *Vadose Zone Journal*, v. 7, n. 2, pp. 587–600.
- SIMUNEK, J., 2006, “Models of water flow and solute transport in the unsaturated zone”, *Encyclopedia of hydrological sciences*.
- TAKEUCHI, J., KAWACHI, T., IMAGAWA, C., et al., 2010, “A physically based FVM watershed model fully coupling surface and subsurface water flows”, *Paddy and Water Environment*, v. 8, n. 2, pp. 145–156.
- TAYLOR, S., 1972, *Physical edaphology; the physics of irrigated and nonirrigated soils*. San Francisco, W.H. Freeman.
- TEIXEIRA, P. C., DONAGEMMA, G. K., FONTANA, A., et al., 2017, “Manual de métodos de análise de solo”, *Rio de Janeiro, Embrapa*. 573p.
- TOMMASELLI, J. T. G., 1997, *Influencia de algumas características do solo sobre a califração de um aparelho de TDR (Time-Domain Reflectometry)*. São Paulo, USP/CENA.
- TOPP, G. C., DAVIS, J., ANNAN, A. P., 1980, “Electromagnetic determination of soil water content: Measurements in coaxial transmission lines”, *Water resources research*, v. 16, n. 3, pp. 574–582.
- VAN GENUCHTEN, M. T., 1980, “A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils 1”, *Soil science society of America journal*, v. 44, n. 5, pp. 892–898.
- VAN GENUCHTEN, M., LEIJ, F., YATES, S., et al., 1991, “The RETC Code for Quantifying Hydraulic Functions of Unsaturated Soils”, *EPA/600/2-91/065, R.S.*, v. 83 (01).

- VOGEL, T., VAN GENUCHTEN, M. T., CISLEROVA, M., 2000, “Effect of the shape of the soil hydraulic functions near saturation on variably-saturated flow predictions”, *Advances in Water Resources*, v. 24, n. 2, pp. 133–144.
- VOGEL, T., CISRELOVA, M., 1988, “on the reliability of unsaturated hydraulic conductivity calculated from the moisture retention curve”, *Transport in porous media*, v. 3, n. 1, pp. 1–15.
- ZAMBRA, C., DUMBSER, M., TORO, E., et al., 2012, “A novel numerical method of high-order accuracy for flow in unsaturated porous media”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 89, n. 2, pp. 227–240.
- ZARBA, R. L., 1988, *A numerical investigation of unsaturated flow*. Tese de Mestrado, Massachusetts Institute of Technology.

Apêndice A

Descrições morfológicas dos perfis

A.1 PLANOSSOLO HÁPLICO Distrófico arênico - P2

SITUAÇÃO, DECLIVIDADE - Trincheira aberta no terço médio da encosta.

LOCALIZAÇÃO - Área de pasto da Fazendinha Agroecológica do Km 47, Município de Seropédica, Baixada Fluminense – RJ.

VEGETAÇÃO E USO ATUAL - Floresta tropical subperenifólia/Pastagem.

DRENAGEM - Imperfeito a moderadamente drenado.

PEDREGOSIDADE - Não pedregoso.

ROCHOSIDADE - Não Rochosa.

EROSÃO - Laminar não aparente.

RELEVO REGIONAL: Plano à ondulado.

RELEVO LOCAL - Suave ondulado.

CLIMA -Aw pela classificação de Köppen.

DESCRITO E COLETADO POR - Carlos Roberto Pinheiro Junior, Carlos Wagner Rodrigues do Nascimento, João Antonio Montibeller Furtado e Silva, João Henrique Gaia Gomes, Jorge Luiz Heraclito de Mattos, Leonardo Durval Duarte Guimarães, Marcela López Lazaro, Mateus Marques Bueno, Pedro Armentano Mudadado Xavier e Wadson Menezes.

DESCRIÇÃO MORFOLÓGICA

- **A:** 0-8 cm, cinzento-escuro (5YR 4/1, úmida) e cinzento (5YR 5/1, seca); arenosa, fraca, pequeno a médio, granular; não plástica e não pegajosa; macia, muito friável, não plástica e não pegajosa;transição plana e clara.
- **AE:** 8-22 cm, cinzento-escuro (7,5YR 4/1, úmida) e cinzento (7,5YR 5/1, seca); arenosa; fraca, pequeno a médio, granular; macia, muito friável, não

plástica e não pegajosa; transição plana e abrupta.

- **E:** 22-69 cm, bruno-acinzentado (10 YR 5/2); arenosa; grão simples; solta, solta, não plástica e não pegajosa; transição ondulada e abrupta.
- **B1:** 69-92 cm, bruno-amarelado-escuro (10YR 4/6); argilo-arenosa; moderado, muito pequeno a pequeno, blocos subangulares; ligeiramente dura, friável; ligeiramente plástica e não pegajosa; transição plana e gradual.

Hor.	Profund. (cm)	Granulometria		Classe Textural	Cor Úmida	Cor do Mosqueado	Estrutura	Fc	DP (g/cm ³)
		Areia	Argila						
A	0 - 8	809	99	Areia Franca	5 Y 4/1	Não tem	Granular	1,007	2,58
AE	8 - 22	876	43	Areia	7,5 YR 4/1	Não tem	Granular	1,003	2,53
E	22 - 69	831	92	Areia Franca	10 YR 5/2	Não tem	Grão Simples	1,001	2,59
B1	69 - 92	564	388	Argila Arenosa	10 YR 4/6	Não tem	Bloco Angular	1,021	2,54
B2	92 - 133	441	443	Argila	10 YR 4/3	Não tem	Bloco Sub-Angular	1,028	2,62
B3	133 - 155 ⁺	513	367	Argila Arenosa	10 YR 4/4	Não tem	Bloco Angular	1,024	2,63

Tabela A.1: Dados físicos e morfológicos do perfil P2.

Hor.	Granulometria		Estrutura	Cor Úmida	Porosidade (%)		DS (g/cm ³)	Condutividade Hidráulica (cm/min)
	Areia	Argila			Macro	Micro		
A	809	99	Granular	5 YR 4/1	35,0	20,7	1,43	0,868
AE	876	43	Granular	7,5 YR 4/1	43,4	14,1	1,48	1,587
E	831	92	Grão Simples	10 YR 5/2	30,0	17,0	1,56	0,404
BE	564	388	Bloco Sub-Angular	10 YR 4/6	27,6	26,3	1,55	0,285
B1	441	443	Bloco Angular	10 YR 4/3	23,8	33,7	1,6	0,321
B2	513	367	Bloco Ang./ Sub-Angular	10 YR 4/4	20,8	35,3	1,57	0,268

Tabela A.2: Dados físicos e morfológicos do perfil P2.

A.2 PLANOSSOLO HÁPLICO - P5

SITUAÇÃO, DECLIVIDADE - Trincheira no terço inferior da encosta.

LOCALIZAÇÃO - Área de pasto da Fazendinha Agroecológica do Km 47, Município de Seropédica, Baixada Fluminense - RJ.

VEGETAÇÃO E USO ATUAL - Floresta tropical subperenifólia/Pastagem.

DRENAGEM - imperfeitamente drenado.

PEDREGOSIDADE - Não pedregoso.

ROCHOSIDADE - Não Rochosa.

EROSÃO - Laminar não aparente.

RELEVO REGIONAL - Plano à ondulado.

RELEVO LOCAL - Suave ondulado.

CLIMA - Aw pela classificação de Köppen.

DESCRITO E COLETADO POR - Carlos Wagner Rodrigues do Nascimento e Pedro Vieira Cruz.

DESCRIÇÃO MORFOLÓGICA

- **A1:** 0-9 cm, cinzento-escuro (5YR 4/1, úmida) e cinzento (5YR 6/1, seca); areia franca; fraco, muito pequeno a pequeno, granular; macia, muito friável, não plástica e não pegajosa; transição plana e clara.
- **A2:** 9-24 cm, bruno (7,5YR 4/2, úmida) e cinzento-claro (7,5YR 7/1, seca); areia franca; fraco, pequena a médio, granular; macia, muito friável, não plástica e não pegajosa; transição plana e clara.
- **AE:** 24-38 cm, bruno (7,5YR 4/2, úmido) e cinzento-claro (7,5YR 7/1, seco), areia franca; fraco, muito pequena, granular; macia, muito friável, não plástica e não pegajosa; transição plana e clara.
- **E1:** 38-116 cm, bruno (10YR 5/2, úmida) e cinzento-claro (10YR 7/1, seca); areia franca; grão simples, solta, solta, não plástica e não pegajosa; transição plana e gradual.

Hor.	Profund. (cm)	Granulometria		Classe Textural	Cor Úmida	Cor do Mosqueado	Estrutura	Fc	DP (g/cm ³)
		Areia	Argila						
A1	0 - 9	913	31	Areia	5 Y 4/1	Não tem	Granular	1,004	2,62
A2	8 - 24	910	18	Areia	7,5 YR 4/2	Não tem	Granular	1,001	2,63
AE	24 - 38	909	2	Areia	7,5 YR 4/2	Não tem	Granular	1,001	2,60
E1	38 - 116	930	17	Areia	10 YR 5/2	Não tem	Grão Simples	1,001	2,63
E2	116 - 145	865	5	Areia	10 YR 5/2	10 YR 5/8	Grão Simples	1,001	2,60
EB	145 - 158	717	19,8	F. Aren.	10 YR 5/3	10 YR 5/8	Bloco Sub-Angular	1,005	2,56
B1	158 - 172	621	267	F. Arg. Arenosa	10 YR 5/2	10 YR 4/6	Bloco Angular	1,007	2,54

Tabela A.3: Dados físicos e morfológicos do perfil P5.

Hor.	Granulometria		Estrutura	Cor Úmida	Porosidade (%)		DS (g/cm ³)	Condutividade Hidráulica (cm/min)
	Areia	Argila			Macro	Micro		
A1	913	31	Granular	5 YR 4/1	38,8	23,5	1,58	1,522
A2	910	18	Granular	7,5 YR 4/2	35,3	16,9	1,42	1,902
AE	909	2	Granular	7,5 YR 4/2	32,1	16,6	1,38	0,904
E1	930	17	Grão Simples	10 YR 5/2	25,7	15,9	1,61	0,642
E2	865	5	Grão Simples	10 YR 5/2	22,5	17,5	1,75	0,749
EB	717	19,8	G.S./ Bloco Sub-Angular	10 YR 5/3	15,3	31,5	1,78	0,036
B1	621	267	Bloco Angular	10 YR 5/2	15,3	37,1	1,74	0,053

Tabela A.4: Dados físicos e morfológicos do perfil P5.

A.3 PLANOSSOLO HÁPLICO - P7

SITUAÇÃO, DECLIVIDADE - Trincheira no terço inferior da encosta.

LOCALIZAÇÃO - Área de pasto da Fazendinha Agroecológica do Km 47, Município de Seropédica, Baixada Fluminense - RJ.

VEGETAÇÃO E USO ATUAL - Floresta tropical.

subperenifólia/Pastagem. **DRENAGEM** - imperfeitamente drenado.

PEDREGOSIDADE - Não pedregoso.

ROCHOSIDADE - Não Rochosa.

EROSÃO - Laminar não aparente.

RELEVO REGIONAL - Plano à ondulado.

RELEVO LOCAL - Suave ondulado.

CLIMA - Aw pela classificação de Köppen.

DESCRITO E COLETADO POR - Carlos Wagner Rodrigues do Nascimento, Bruno Gomes de Moraes, Suelem Marques de Oliveira Durão, Júlio César Francisco Ferreira de Araujo Junior e Tércio da Silva Pacheco.

DESCRIÇÃO MORFOLÓGICA

- **A1:** 0-7 cm, bruno-acinzentado muito escuro (10YR 3/2, úmida) e bruno-acinzentado-escuro (10YR 4/2, seca); areia franca; fraco, muito pequeno a pequeno, granular; macia, muito friável, não plástica e não pegajosa; transição plana e clara.
- **A2:** 7-16 cm, bruno-acinzentado muito escuro (10YR 3/2, úmida) e bruno-acinzentado (10YR 5/2, seca), mosqueado pouco, pequeno, difuso, bruno-amarelado (10YR 5/6); areia franca; fraco, pequena a médio, granular; macia, muito friável, não plástica e não pegajosa; transição plana e clara.
- **AE:** 16-26 cm, bruno (10YR 4/3, úmida) e cinzento-brunado-claro (10YR 6/2, seca), mosqueado pouco, pequeno, difuso, bruno-amarelado (10YR 5/8); areia franca; grão simples, solta, solta, não plástica e não pegajosa; transição plana e clara.
- **E1:** 26-41 cm, bruno-acinzentado-escuro (2,5Y 4/2, úmida) e cinzento-brunado-claro (2,5Y 6/2, seca), mosqueado pouco, pequeno, distinto, bruno-amarelado (10YR 5/8); areia franca; grão simples e moderado, médio a grande, blocos subangulares; ligeiramente dura, muito friável, não plástica e não pegajosa; transição plana e clara.
- **E2:** 41-52 cm, bruno-oliváceo (2,5Y 4/4, úmida) e bruno-amarelado-claro (2,5Y 6/3, seca), mosqueado pouco, pequeno, distinto, bruno-amarelado (10YR

5/8); areia franca; grão simples e moderado, médio, blocos subangulares; ligeiramente dura, muito friável, não plástica e não pegajosa; transição plana e clara.

- **E3:** 52-69 cm, bruno-oliváceo (2,5Y 4/4, úmida) e cinzento-brunado-claro (2,5Y 6/2, seca), mosqueado pouco, pequeno, difuso, bruno-amarelado (10YR 5/8); areia franca; grão simples e moderado, médio a grande, blocos subangulares; ligeiramente dura, muito friável, não plástica e não pegajosa; transição plana e clara.
- **BE:** 69-97 cm, bruno-amarelado-escuro (10YR 4/4), mosqueado comum, médio, distinto, vermelho-amarelado (7,5YR 6/8); franco arenosa; moderado, médio a grande, blocos subangulares; dura, muito friável, plástica e ligeiramente pegajosa; transição plana e clara.

Hor.	Profund. (cm)	Granulometria		Classe Textural	Cor Úmida	Cor do Mosqueado	Estrutura	Fc	DP (g/cm ³)
		Areia	Argila						
A1	0 - 7	814	94	Areia Franca	10 Y 3/2	Não tem	Granular	1,0081	2,45
A2	7 - 16	865	45	Areia Franca	10 Y 3/2	10 YR 5/6	Granular	1,0050	2,54
AE	16 - 26	859	34	Areia Franca	10 Y 4/3	10 YR 5/8	Granular	1,0040	2,44
E1	26 - 41	851	41	Areia Franca	2,5 YR 4/2	10 YR 5/8	G.S./ Bloco Sub-Angular	1,0030	2,57
E2	41 - 52	844	81	Areia Franca	2,5 YR 4/4	10 YR 5/8	G.S./ Bloco Sub-Angular	1,0020	2,57
E3	52 - 69	819	85	Areia Franca	2,5 YR 4/4	10 YR 5/8	G.S./ Bloco Sub-Angular	1,0040	2,56
BE	69 - 97	759	118	Franco Arenosa	10 Y 4/4	7,5 YR 6/8	Bloco Sub-Angular	1,0081	2,56
B1	97 - 127	675	247	F. Arg. Arenosa	10 YR 5/2	10 YR 5/8	Bloco Angular	1,0152	2,59
B2	127 - 160	693	261	F. Arg. Arenosa	10 YR 5/3	2,5 YR 4/8	Bloco Sub-Angular	1,0070	2,62

Tabela A.5: Dados físicos e morfológicos do perfil P7.

Hor.	Granulometria		Estrutura	Cor Úmida	Porosidade (%)		DS (g/cm ³)	Condutividade Hidráulica (cm/min)
	Areia	Argila			Macro	Micro		
A1	814	94	Granular	10 Y 3/2	42,2	17,6	1,33	10,344
A2	865	45	Granular	10 Y 3/2	37,9	19,1	1,51	1,807
AE	859	34	Granular	10 Y 4/3	32,1	23,0	1,35	0,583
E1	851	41	G.S./ Bloco Sub-Angular	2,5 YR 4/2	29,2	21,0	1,49	0,309
E2	844	81	G.S./ Bloco Sub-Angular	2,5 YR 4/4	28,9	19,7	1,48	0,250
E3	819	85	G.S./ Bloco Sub-Angular	2,5 YR 4/4	18,2	22,3	1,44	0,076
BE	759	118	Bloco Sub-Angular	10 Y 4/4	21,5	30,8	1,57	0,014
B1	675	247	Bloco Angular	10 YR 5/2	21,0	32,5	1,45	0,178
B2	693	261	Bloco Sub-Angular	10 YR 5/3	19,7	31,2	1,54	0,092

Tabela A.6: Dados físicos e morfológicos do perfil P7.

Apêndice B

Relatório de Atividades Experimentais em Campo

B.1 Coleta de dados de umidade

Este relatório tem por objetivo descrever as atividades realizadas em campo para coleta de dados experimentais que serão utilizados na dissertação de mestrado da discente Isabela de Aquino Souza, aluna de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). O trabalho de dissertação tem como orientadora a professora Dra. Rosane F. Oliveira e como coorientador o professor Dr. Wilian J. dos Santos. Além disso, as atividades em campo foram orientadas pelo professor Dr. Marcos B. Ceddia e contaram também com os esforços e o conhecimento do técnico laboratorista Dr. Martin de Oliveira Freire.

O experimento foi realizado na área da Fazendinha Agroecológica Km 47 (Sistema Integrado de Produção Agroecológica - SIPA), localizada no município de Seropédica, RJ. Este local é resultado de uma parceria iniciada em 1993 entre duas unidades da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa Agrobiologia e Embrapa Solos), a Empresa de Pesquisa Agropecuária do Estado do Rio de Janeiro (Pesagro-Rio), a UFRRJ e o Colégio Técnico da UFRRJ (CTUR) (NEVES *et al.*, 2005).

A área estudada encontra-se ocupada por pastagem e apresenta relevo suave-ondulado, altitude aproximada de 40 metros (relevo variando entre 30 e 70 metros) sobre o nível do mar, e ausência de rochosidade e pedregosidade.

Alguns cuidados foram tomados para que os dados experimentais não sofressem grandes alterações provenientes de interferências do meio externo. Por isso, os locais escolhidos para a realização do experimento estão situados em uma região de altitude média e possuem solo o mais plano possível. Vale salientar que a escolha de regiões

com algum tipo de declividade acarretaria maior escoamento horizontal de água, isso afastaria o experimento de seu objetivo principal que é estudar o escoamento vertical. Tendo em vista que as plantas absorvem água e nutrientes do solo (REICHARDT e TIMM, 2004), outra medida adotada foi a retirada da grama existente na região do experimento, como mostrado na Figura (B.1), a fim de que o único fenômeno avaliado fosse, de fato, a infiltração de água no solo.



Figura B.1: Retirada da grama existente no local do experimento.

Três trincheiras foram abertas em locais distintos dessa região, como mostrado na Figura (B.2), assim dentro de um experimento foram feitos três experimentos, que avaliaram tipos de solos distintos. Ao lado de cada trincheira, demarcou-se três cotas experimentais próximas e alinhadas com distância de, aproximadamente, 2m uma da outra, como pode ser visto na Figura (B.3). Com essa montagem, cada perfil de solo será avaliado em três repetições, possibilitando, assim, que qualquer variação espacial possa ser tratada. As descrições morfológicas dos solos avaliados de acordo com os critérios do Sistema Brasileiro de Classificação de Solos (SiBCS), podem ser encontradas no Apêndice A.



Figura B.2: Planossolos avaliados nas atividades em campo.

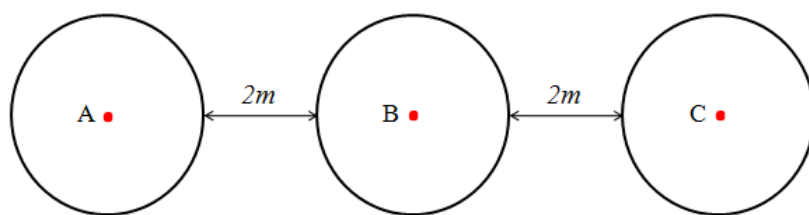


Figura B.3: Esquema de cotas experimentais

No centro de cada cota foi colocado um tubo de acrílico por onde o sensor TDR pôde ser introduzido, como na figura(B.6). Este sensor é um dispositivo de medição para a determinação portátil da umidade volumétrica de um perfil de solo (MANUAL-TDR, 2017). O modelo do sensor TDR é TRIME-PICO IPH e ele possui um receptor *bluetooth*, TRIME-PICO BT, por onde as informações são passadas para o computador de mão, modelo RPDA da empresa Fujitsu-Siemens[®], ou para um celular que possua o aplicativo compatível. Ambos, o sensor e o computador de mão, são fabricados pela empresa IMKO[®]. A colocação dos tubos de acrílico seguiu as orientações que podem ser encontradas em (MANUAL-TDR, 2017).



Figura B.4: Vista superior de uma cota experimental

Para cada perfil, o procedimento descrito a seguir foi realizado separadamente. Cada uma das cotas foi demarcada por um anel de ferro, cravado verticalmente no solo a uma profundidade aproximada de 5 *cm*. O anel utilizado possuía 60 *cm* de diâmetro, 25 *cm* de altura e 1,5 *cm* de espessura. Este equipamento tinha a finalidade de isolar área considerada, evitando o vazamento de água para o exterior do anel, reduzindo, assim, o efeito da dispersão lateral da lâmina d'água que seria inserida posteriormente. Esta montagem é mostrada na figura (B.4).



Figura B.5: TRIME-PICO IPH transmitindo dados, via *bluetooth*, para TRIME-PICO BT

Outra decisão previamente tomada foi programar o sensor TDR para aferir a constante dielétrica (K_a) e não a umidade volumétrica. Isto se deve a um estudo feito, também em campo, para validar equação de (TOPP *et al.*, 1980), usada como padrão pelo TDR. Esta outra atividade de campo consistiu em fazer uma curva de calibração para cada horizonte dos perfis considerados. Por meio deste trabalho preliminar, foi possível entender que a equação de (TOPP *et al.*, 1980), não retorna a umidade volumétrica coerente para os horizontes A e E existentes nos perfis analisados pelo experimento contido neste trabalho. Portanto, optou-se pela constante dielétrica que, posteriormente, foi convertida em umidade volumétrica fazendo uso das equações fornecidas pela curva de calibração.



Figura B.6: Introdução do TDR.

Para elaborar o desenho experimental, decidiu-se que as medições seriam realizadas a cada 20cm e de forma sobreposta. Deste modo, foram executadas seis medições por vez em cada tubo de acrílico, nos seguintes intervalos de profundidade: $0\text{ a }20\text{cm}$, $10\text{cm a }30\text{cm}$, $20\text{cm a }40\text{cm}$, $30\text{cm a }50\text{cm}$, $40\text{cm a }60\text{cm}$ e $50\text{cm a }70\text{cm}$. Ainda considerou-se, para cada intervalo de medição, a constante dielétrica da parte central do intervalo. Isto é, o valor de K_a na profundidade 10cm equivale àquele capturado pelo sensor no intervalo $0\text{ a }20\text{cm}$; o valor de K_a na profundidade 20cm equivale àquele capturado pelo sensor no intervalo $10\text{cm a }30\text{cm}$, e assim sucessivamente.



Figura B.7: Posicionamento da caixa d'água em relação às parcelas experimentais.

O experimento contou, ainda, com a colocação de uma caixa d'água, com capacidade de 1000 litros, como pode ser visto na figura (B.7). Para cada dia de medição, a caixa foi reabastecida, pela manhã, fazendo uso de água retirada do lago artificial do SIPA. Além disso, foi decidido previamente que, durante a realização do ensaio, uma lâmina d'água de, em média, $1,5\text{cm}$, seria constantemente mantida dentro de cada área demarcada pelo anel de ferro, isto é mostrado na figura (B.8). Sendo a altura da lâmina de água medida com uma régua colocada verticalmente dentro do anel de ferro, em intervalos de tempos regulares. Tendo em vista manter a lâmina d'água constante, ligou-se uma mangueira à caixa d'água, gerando, assim, um fluxo de água através da diferença de potencial. Este fluxo de água foi direcionado para dentro do anel de metal, tendo o cuidado de não deixar que a água fluísse para dentro do tubo ou que vazasse para fora do anel metálico.



Figura B.8: Manutenção da carga hidráulica

Os ensaios experimentais em campo foram conduzidos durante o mês de julho de 2019 e totalizaram oito dias, a saber, 01/07, 02/07, 03/07, 08/07, 09/07, 10/07, 11/07 e 12/07. Nos primeiros 7 dias, a medição foi feita em 1 tubo distinto por dia. Já no oitavo dia, os trabalhos foram estendidos e dois tubos consecutivos foram medidos. Cada medição durou, em média 3h e, em todos os dias de experimento, foi feita uma medição inicial, a fim de registrar a constante dielétrica inicial do solo. Em seguida, foi estabelecido o seguinte procedimento para medição e registro de dados: na primeira hora foram feitas medições a cada 5 minutos; na segunda hora as repetições respeitavam o intervalo de tempo de 10 minutos e na terceira hora as medições foram feitas a cada 15 minutos.

B.2 Confeção da curva de calibração

Dentre as várias técnicas de determinação do conteúdo de água no solo, uma das mais relevantes é a reflectometria no domínio do tempo (TDR). Este método se destaca dos demais por ser exato, não destrutivo, portátil e de fácil manuseio (COELHO *et al.*, 2006; TOMMASELLI, 1997; TOPP *et al.*, 1980). Algumas desvantagens dos equipamentos TDR são o pouco conhecimento sobre o seu comportamento em solos tropicais, por ser um método ainda pouco estudado nestes solos; a dependência do teor de materiais magnéticos e tipo de solo (mineral ou orgânico); a calibração trabalhosa; a influência dos óxidos de ferro e da massa específica do solo sobre as medidas (DOS SANTOS *et al.*, 2010); e o alto custo de aquisição.

O sensor TDR usado neste trabalho, é descrito em (MANUAL-TDR, 2017), calcula a umidade do solo através da equação de (TOPP *et al.*, 1980), um modelo empírico que consiste de um polinômio de terceiro grau e que, segundo (OR *et al.*, 1997), funciona bem para solos minerais com conteúdo de água menor que $0,5 \text{ cm}^3.\text{cm}^{-3}$.

A equação de Topp é dada por

$$\theta = -5,3 \times 10^{-2} + 2,92 \times 10^{-2}K_a - 5,5 \times 10^{-4}K_a^2 + 4,3 \times 10^{-6}K_a^3, \quad (\text{B.1})$$

em que K_a representa a constante dielétrica do solo.

De acordo com (JÚNIOR e OLIVEIRA, 2003), muitos fatores específicos do solo influenciam as medidas do TDR, como, por exemplo, temperatura, teor de matéria orgânica e o teor de óxido de ferro e manganês. Por esta razão, pesquisadores no assunto (CICHOTA *et al.*, 2002; SILVA e GERVÁSIO, 1999; TOMMASELLI, 1997) consideram que a relação estabelecida por Topp não pode ser aplicada para todos os tipos de solo, uma vez que diversos atributos do solo podem conferir erros às medições. Os fatos explicitados justificam o estudo de campo realizado para obter uma curva de calibração para os solos considerados neste trabalho.

O experimento conduzido para a obtenção da curva de calibração do sensor TDR trabalhou amostras de solo deformadas. As amostras de cada horizonte, a saber A, E e B, foram retiradas dos perfis classificados no apêndice (A.1). Como os horizontes dos outros dois perfis são basicamente os mesmos, as curvas de calibração foram feitas apenas para um perfil e generalizadas para os demais.

Cada uma das amostras coletadas foi colocada para secar ao ar, como pode ser visto na figura (B.9). Em seguida foram passadas em peneiras de 2mm e dispostas em recipientes de 100mm de diâmetro e 250mm de altura, confeccionados com tubos de PVC, como na figura (B.10).

Para cada horizonte, encheu-se um total de 15 recipientes com as amostras de solo coletadas. Assim, para os três horizontes estudados, foram necessários 45 vasilhames.



Figura B.9: Amostras de solo secando ao ar.

Os solos de 36 desses recipientes foram colocados para saturar por um período de 48h. Os nove recipientes restantes foram mantidos apenas em estado de terra fina seca ao ar (TFSA), em que a umidade é residual, ou seja, muito baixa, mas não zero.

O arranjo experimental consistiu em medições que duraram 4 dias. No primeiro dia (10/04/2019), apenas as amostras saturadas e de TFSA foram medidas, totalizando 18 recipientes medidos. Isto é, 3 recipientes para cada horizonte em duas condições diferentes (TFSA e saturação). As demais amostras apenas foram colocadas para secar ao ar. No segundo dia (12/04/2019) as amostras, que antes estavam saturadas, secaram ao ar por dois dias e foram medidos 9 recipientes. No terceiro dia (15/04/2019), outros 9 recipientes submetidos a medição, sendo que estes estavam a 5 dias secando ao ar. No último dia (18/04/2019), o último conjunto de 9 recipientes foi medido. Este último foi exposto a 8 dias de secagem ao ar.

Em cada dia de medição o procedimento descrito a seguir foi realizado. Inicialmente, o sensor TDR de haste PICO64, foi usado para medir a umidade volumétrica e a constante dielétrica do conjunto de recipientes destinado ao dia de medição em questão. Este procedimento pode ser visto na figura (B.11). Em seguida, uma amostra de cada recipiente foi retirada, pesada em balança eletrônica e colocada em estufa durante 24h até que atingisse o ponto de murcha permanente. Após as 24h, essas amostras eram retiradas da estufa e novamente pesava-se cada uma delas. Com base nas massas de solo seco, massa específica do solo e das massas úmidas determinadas diariamente, foram obtidos os valores de umidade volumétrica de água do solo, por meio da equação

$$\theta_i = \left[100 \times \frac{(PU_i - PS_i)}{PS_i} \right] \times \rho_s \quad (B.2)$$



Figura B.10: Amostras peneiradas e acomodadas em recipientes de PVC.

em que θ_i é a umidade do solo em unidade volumétrica, PU é a massa real do solo úmido, PS é a massa real do solo seco e ρ_s é a densidade do solo em questão, que varia de acordo com o horizonte considerado. Além disso, a massa real do solo seco e do solo úmido são calculadas subtraindo-se a massa do recipiente da massa do conjunto (solo mais recipiente). Esse conjunto pode ser visto na figura (B.12), que é obtido ao separar a amostra para ser colocada na estufa.

Após os procedimentos descritos, e de posse dos valores de umidade volumétrica (medida e calculada) e constante dielétrica, os gráficos das figuras (B.13), (B.14), (B.15), (B.16), (B.17) foram plotados. Os pontos representados nos gráfico por asteriscos referem-se aos dados de umidade volumétrica medidos pelo sensor TDR. Uma vez que o equipamento faz uso da equação de (TOPP *et al.*, 1980) para calcular o valor de θ , um dos objetivos deste trabalho foi verificar o quanto os valores calculados (representados nos gráficos por pequenos círculos preenchidos na cor preta) se distanciam daqueles que foram medido.

Pode-se observar, através da figura (B.13), que os dados medidos pelo sensor TDR superestimam os dados obtidos através do experimento realizado em laboratório. Essa afirmação também é válida para os dados medidos no horizonte E, apresentados na figura (B.14). Apesar dessas observações, os dados medidos e aqueles obtidos em laboratório podem ser considerados próximos dos dados experimentais em ambos os casos.

Contudo, ao observar o gráfico da figura (B.15) pode-se constatar que o erro cometido pela equação de (TOPP *et al.*, 1980), usada pelo sensor TDR é bastante acentuado. Este fato foi explicado por (DE LACERDA *et al.*, 2005) ao afirmar que o uso da equação de (TOPP *et al.*, 1980) subestimou os valores do conteúdo de água em um solo argiloso, demonstrando a necessidade de calibração do equipamento para



Figura B.11: Medição de umidade volumétrica e constante dielétrica com o sensor TDR.

o uso do solo em questão.

Com base nestes fatos, o primeiro teste feito com estes dados foi obter uma única curva de calibração que fosse válida para todos os horizontes estudados. Esta tentativa resultou no gráfico da figura (B.16). Observando este gráfico pode-se notar alguns pontos estão bem distantes (acima) da curva de ajuste. Estes pontos são os medidos para o horizonte B. Dessa forma, optou-se por fazer uma curva de calibração somente para o horizonte B e testar uma outra curva de calibração para os outros dois horizontes (A e E) juntos. A partir desse último teste, obteve-se o gráfico da figura (B.17). A curva apresentada neste gráfico aproxima melhor os pontos, ou seja, com menor erro do que a curva que envolve os três horizontes. Isto pode ser visto pelo parâmetro R^2 , conhecida como coeficiente de determinação e que informa, em porcentagem, o quanto a regressão se aproxima do valor ideal. No gráfico da figura (B.17) este valor é 0,982, ou seja, os valores estimados pela curva de calibração estão 98,2% precisos se comparados aos dados ideais.

A aplicação deste estudo no presente trabalho se deu no apêndice (B.1). Os dados coletados em campo foram medidos em função da constante dielétrica e, posteriormente, convertidos para umidade volumétrica através da equação de calibração

$$\theta = -0,000K_a^3 - 0,032K_a^2 + 3,189K_a - 8,719, \quad (B.3)$$

usada para os horizontes A e E. De forma similar, os dados relativos ao horizonte B, medidos como constante dielétrica, foram convertidos para umidade volumétrica



Figura B.12: Amostra sendo pesada e pronta para ser colocada na estufa.

através da equação

$$\theta = 0,012K_a^3 - 0,693K_a^2 + 13,05K_a - 32,85, \quad (\text{B.4})$$

obtida através do ajuste dos calculados em laboratório.

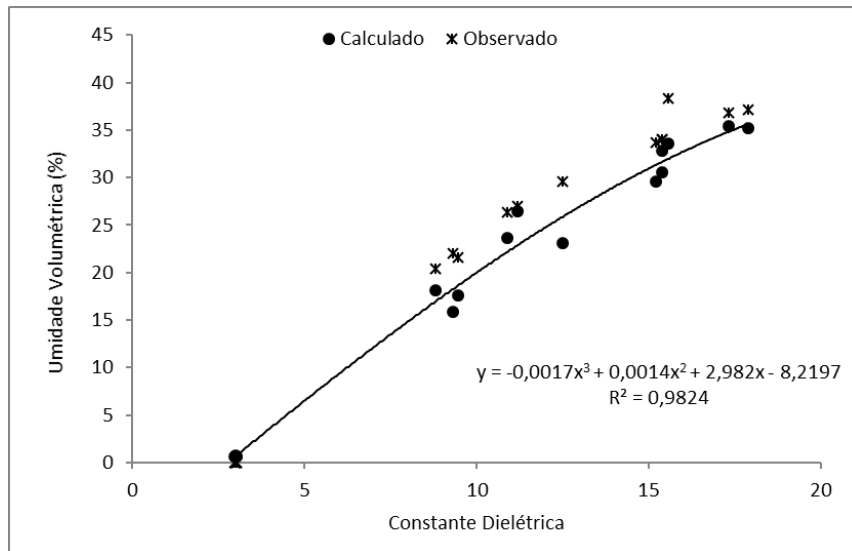


Figura B.13: Curva de calibração para o horizonte A.

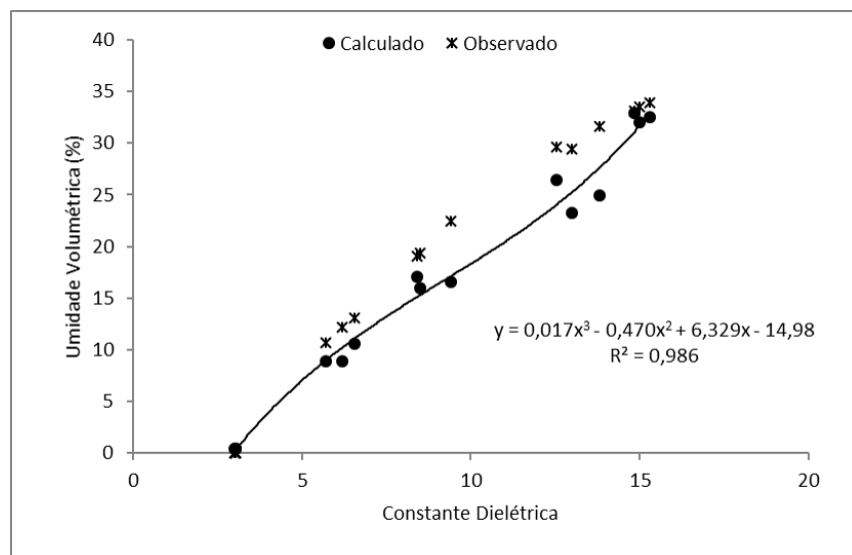


Figura B.14: Curva de calibração para o horizonte E.

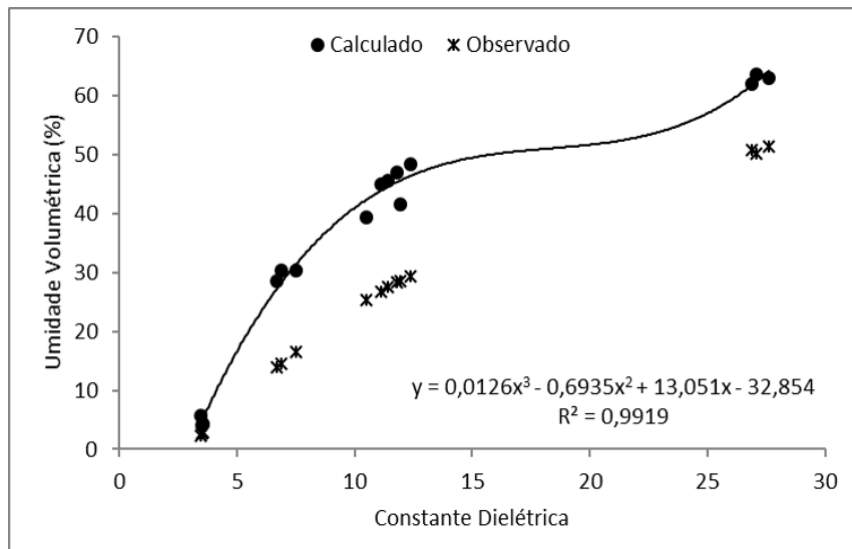


Figura B.15: Curva de calibração para o horizonte B.

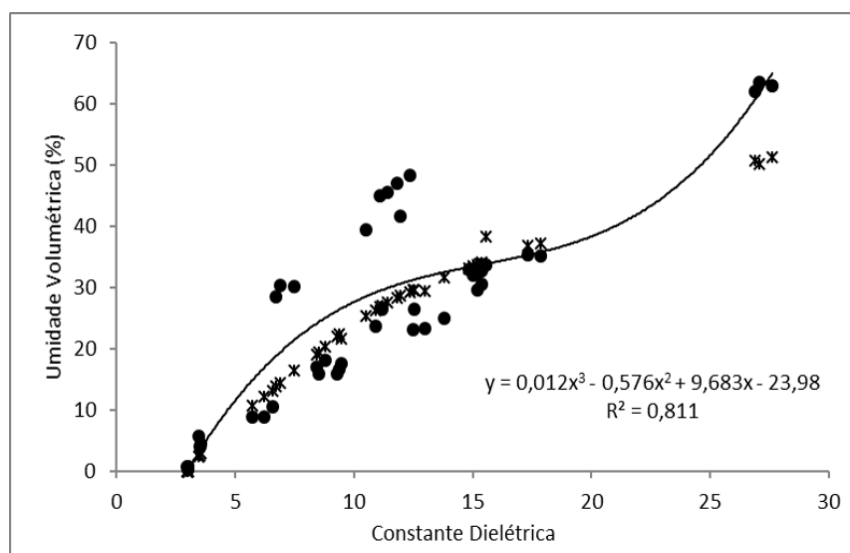


Figura B.16: Curva de calibração para os horizontes A, E e B.

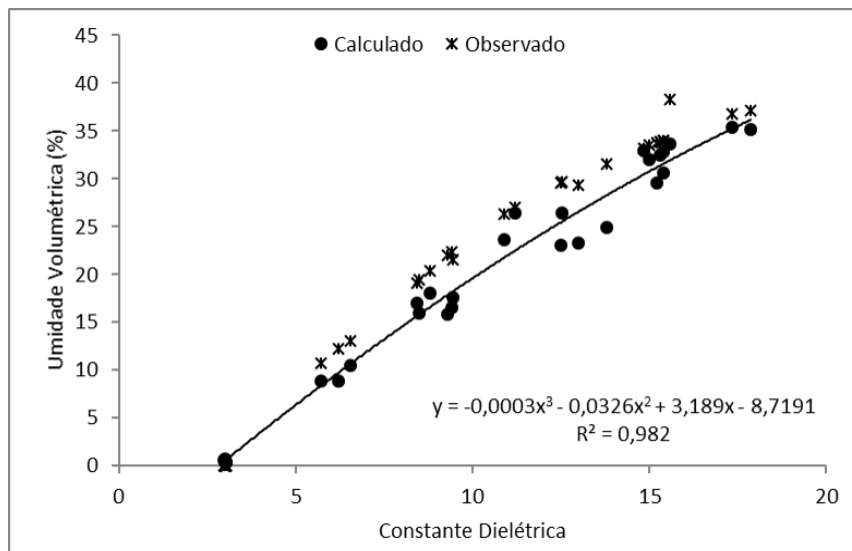


Figura B.17: Curva de calibração para os horizontes A e E.

Apêndice C

Exemplo de inserção de dados no *software* Hydrus 1D

Para dar ao leitor um entendimento mais claro do procedimento adotado para inserir os dados obtidos experimentalmente no *software* Hydrus 1D, foi criado este apêndice. De fato, não foram encontradas referências de experimentos de campo como o descrito neste trabalho e que usassem o *Hydrus* para realizar simulações. Para sanar esta dificuldade descreve-se aqui o preenchimento de cada janela proposta por este *software*.

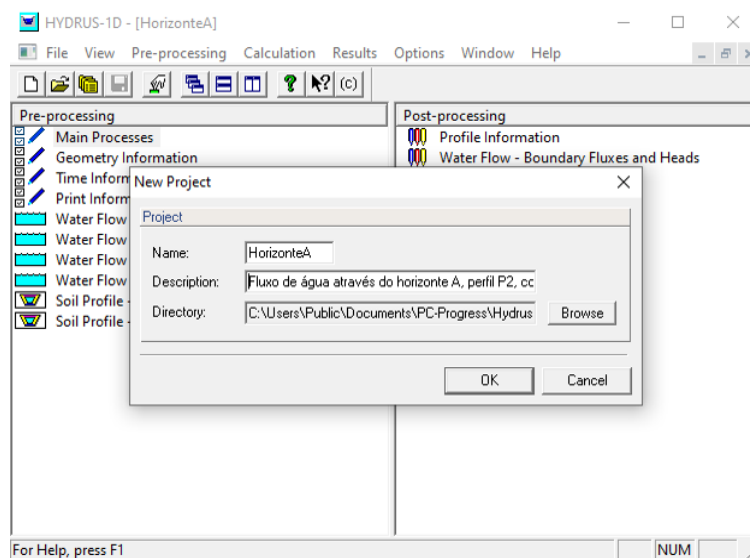


Figura C.1: Criação de um novo projeto no Hydrus 1D.

Ao abrir o *software* e solicitar a criação de um novo projeto, este deve ser nomeado e, dependendo do interesse do usuário, existe a possibilidade de adicionar uma breve descrição. Este procedimento pode ser visto na figura (C.1) em que o projeto Horizonte A foi criado para descrever o fluxo de água através do horizonte A do perfil de solo estudado neste trabalho considerando o modelo de (VAN GE-

NUCHTEN, 1980) para fluxo de água no solo. Em seguida, ao escolher a opção *Next*, a janela mostrada na figura (C.2) é aberta, nela pede-se que seja especificado o processo a ser simulado. Neste caso, o processo de interesse é o fluxo de água no solo, mas existem outras possibilidades de simulação como fluxo de calor, vapor e outros solutos, por exemplo.

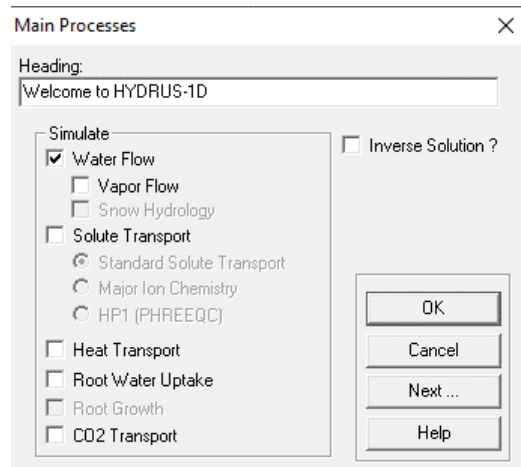


Figura C.2: Especificação do processo a ser estudado.

Prosseguindo com as escolhas, deve-se neste momento escolher a profundidade do perfil de solo a ser estudado e a unidade em que deseja-se trabalhar. Para a camada A do perfil de solo estudado, o preenchimento desta janela é exibido na figura (C.3), em que o tamanho da camada de interesse é 22cm , apenas 1 material será considerado (areia) e apenas uma camada será considerada para balanço de massa. Como a coluna de solo é considerada vertical, escolhe-se a opção 1 para a inclinação, pois este valor corresponde ao cosseno do ângulo entre o eixo vertical e o perfil de solo. Para o horizonte E, o campo *Profundidade do perfil de solo* foi preenchido com 47cm , pois este horizonte ocupa entre 22 e 69cm de profundidade da coluna de solo.

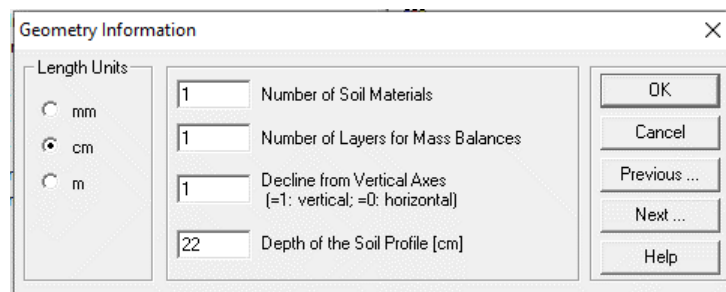


Figura C.3: Determinação da geometria do fenômeno estudado.

A próxima etapa é descrever as unidades e a malha temporal utilizada, a janela do Hydrus para este procedimento é exibida na figura (C.4). Neste caso, trabalhou-se

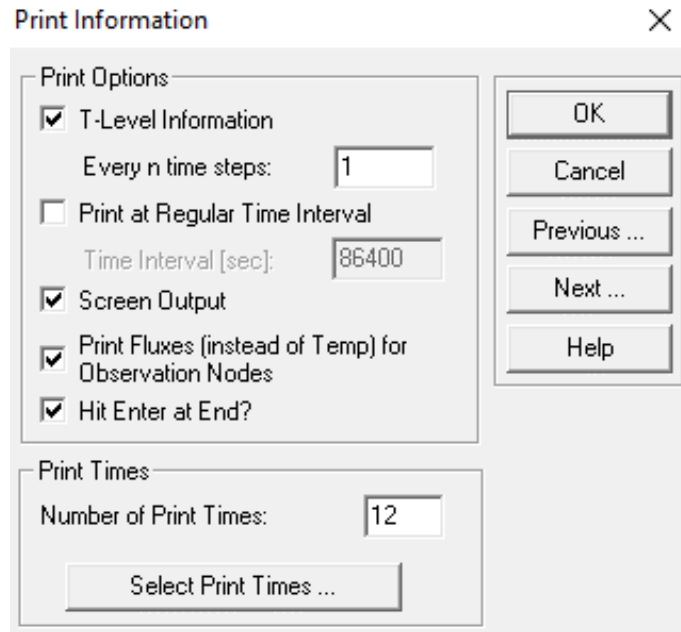
com o tempo em segundos, um tempo total de 1h, 3600s, de infiltração e redistribuição de água e a malha temporal considerada foi $\Delta t = 1s$. Deve-se informar também os tempos para os quais deseja-se armazenar as saídas do *software*. Neste trabalho, optou-se por estudar as saídas de código de 5 em 5 minutos, mesma forma com a qual foram realizadas as medições em campo. Por este motivo, foram selecionados 12 tempos amostrais, em segundos, são eles: 300s, 600s, 900s, 1200s, 1500s, 1800s, 2100s, 2400s, 2700s, 3000s, 3300s, 3600s. Isto é, 12 tempos amostrais, como pode ser visto nas figuras (C.5a) e (C.5b).

Figura C.4: Informações referentes à malha temporal.

As próximas a serem informadas são referentes às iterações do método numérico. Para este conjunto de dados, o manual do *software* recomenda que sejam mantidos os valores padrão, a menos que o usuário seja experiente e saiba exatamente o que está fazendo. Por este motivo, os dados desta janela podem ser vistos na figura (C.6) e foram mantidos como o padrão especificado pelo Hydrus.

O próximo passo é a escolha de informações referentes ao modelo hidráulico de interesse. No caso especificado aqui, foram considerados os modelos de (VAN GENUCHTEN, 1980) e (BROOKS e COREY, 1964) para descrever as curvas de retenção da água no solo sem considerar o fenômeno de histerese no processo estudado. No quadro da figura (C.7a), mostra-se a escolha pelo modelo de (VAN GENUCHTEN, 1980) e, na figura (C.7b), informa-se para o *software* os parâmetros para curva de retenção da água no solo. Neste caso, os parâmetros informados são referentes ao horizonte A do perfil de solo.

A etapa seguinte é a especificação de dados referentes à condição de contorno.



Print Information [X]

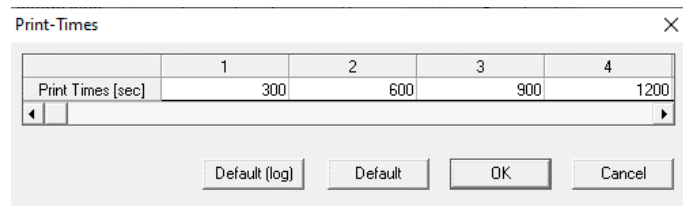
Print Options

- ☒ T-Level Information
 - Every n time steps:
- ☐ Print at Regular Time Interval
 - Time Interval [sec]:
- ☒ Screen Output
- ☒ Print Fluxes (instead of Temp) for Observation Nodes
- ☒ Hit Enter at End?

Print Times

Number of Print Times:

(a) Escolha de informações que serão armazenadas e para as quais serão gerados gráficos.

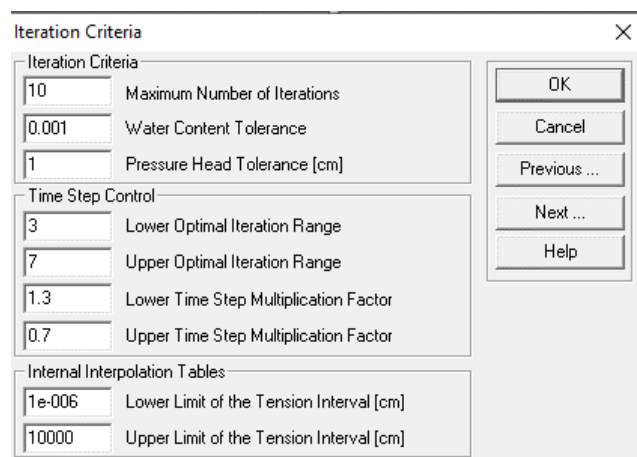


Print-Times [X]

	1	2	3	4
Print Times [sec]	300	600	900	1200

(b) Especificação dos tempos amostrais de interesse do usuário.

Figura C.5: Informações relevantes para armazenamento e impressão de dados em tela.



Iteration Criteria [X]

Iteration Criteria

- Maximum Number of Iterations
- Water Content Tolerance
- Pressure Head Tolerance [cm]

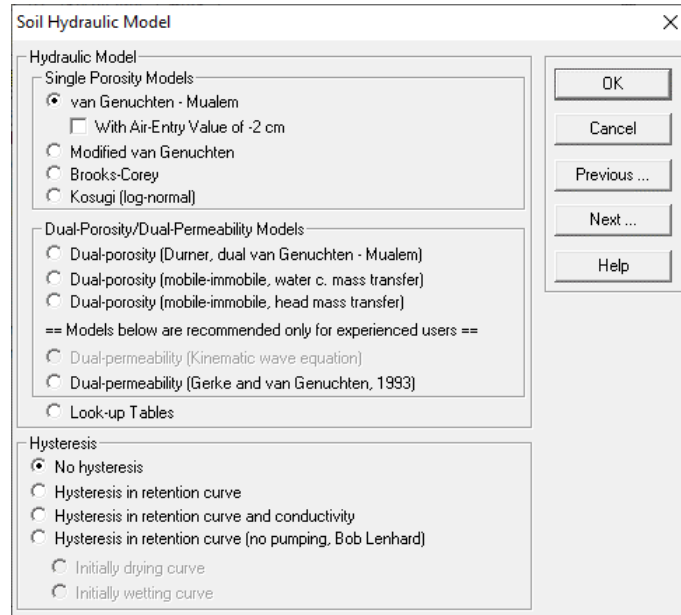
Time Step Control

- Lower Optimal Iteration Range
- Upper Optimal Iteration Range
- Lower Time Step Multiplication Factor
- Upper Time Step Multiplication Factor

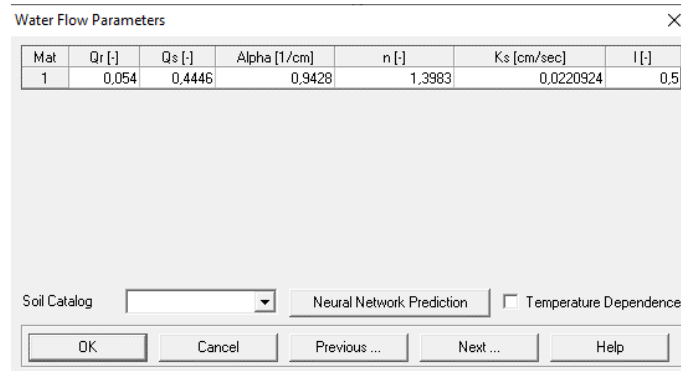
Internal Interpolation Tables

- Lower Limit of the Tension Interval [cm]
- Upper Limit of the Tension Interval [cm]

Figura C.6: Critérios de iteração e controle de etapa de tempo.



(a) Escolha do modelo hidráulico.



(b) Parâmetro para curva de retenção da água no solo.

Figura C.7: Escolha do modelo e de parâmetros hidráulicos.

Inicialmente informa-se de que maneira serão passadas as condições de contorno no topo e no fundo da coluna de solo. O Hydrus permite escolher entre várias opções, mas para o horizonte A utilizou-se condição de fronteira superior constante e inferior variando com o tempo, como na figura (C.9a). Vale ressaltar que o Hydrus permite que as condições de contorno sejam passadas apenas em termos de potencial matricial e, neste trabalho, tratou-se estas condições em termos de umidade volumétrica. Contudo, para se adaptar às opções fornecidas pelo *software*, os valores de umidade volumétrica foram convertidos em potencial matricial através da relação $h = h(\theta)$, dada pela curva de retenção. Para cada modelo usado, (BROOKS e COREY, 1964) ou (VAN GENUCHTEN, 1980), este cálculo foi feito de acordo com os respectivos parâmetros de ajuste.

Para exemplificar esta etapa, considerou-se a fronteira inferior do horizonte A,

dada na profundidade $z = 22\text{cm}$. Neste ponto, tem-se os valores de umidade e potencial matricial especificados como na tabela da figura (C.9b). Na terceira coluna desta tabela estão os valores de potencial matricial calculados através do modelo de (VAN GENUCHTEN, 1980), com parâmetros do horizonte A. Na quarta coluna desta mesma tabela aparecem os valores de potencial matricial calculados através do modelo de (VAN GENUCHTEN, 1980), com parâmetros do horizonte E. Este último conjunto de valores foi usado para simulação no Hydrus com dados referentes ao horizonte E. Como, neste exemplo, trata-se do horizonte A, foram fornecidos para o Hydrus, como pode ser visto na figura (C.9c) os dados de potencial matricial da terceira coluna da tabela (C.9b), no intervalo de tempo $[300,3600]$. Além de fornecer dados de condições de contorno, neste ponto pode-se escolher se os dados de condição inicial serão passados em termos de potencial matricial ou umidade volumétrica. Para gerar os dados aqui apresentados, optou-se por fornecer, para o Hydrus, a condição inicial em termos de umidade volumétrica. Isto porque os ajustes para esta condição foram gerados com base em θ , e não em h .

A próxima janela, pode ser vista na figura (C.8), e é definida, no manual do Hydrus (SIMUNEK *et al.*, 2008), como sendo um módulo externo de perfil que serve para discretização da coluna de solo a partir de uma janela gráfica. Nela podem ser especificadas diversas propriedades do fenômeno considerado e relativas à discretização espacial. Neste ponto, o Hydrus gera como padrão uma malha espacial com 101 pontos. Contudo, para trabalhar com a mesma malha fornecida para o código em ambiente Octave, optou-se por representar a coluna de solo com apenas 23 pontos, para o horizonte A (de 0 a 22cm) e 48 pontos para o horizonte E (de 22 a 69cm).

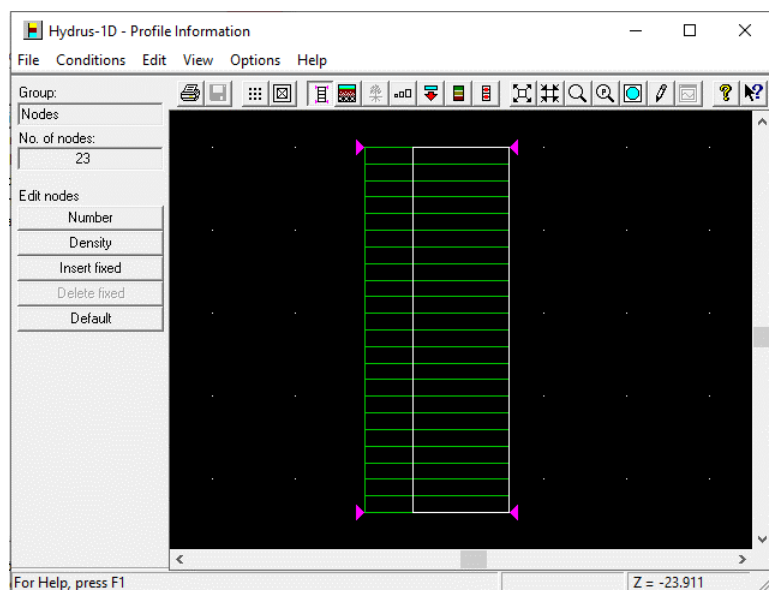


Figura C.8: Informações referentes ao perfil de solo.

Water Flow Boundary Conditions

Upper Boundary Condition

☒ Constant Water Content
☐ Constant Flux
☐ Atmospheric BC with Surface Layer
☐ Atmospheric BC with Surface Run Off
☐ Variable Pressure Head
☐ Variable Pressure Head/Flux
☐ Triggered Irrigation

Lower Boundary Condition

☐ Constant Water Content
☐ Constant Flux
☒ Variable Pressure Head
☐ Variable Flux
☐ Free Drainage
☐ Deep Drainage
☐ Seepage Face; $h =$
☐ Horizontal Drains

Initial Condition

☐ In Pressure Heads
☒ In Water Contents

OK Cancel Previous Next Help

(a) Escolha do tipo de condição de contorno.

Tempo	Umidade Volumétrica	Potencial Matricial Horizonte A	Potencial Matricial Horizonte E
0	0,070078007	-3192,3466	-311,7084
300	0,082750004	-741,94905	-153,80868
600	0,169368111	-22,440114	-13,333196
900	0,320256491	-2,2373355	-1,5126532
1200	0,361214517	-1,2960309	-0,7148351
1500	0,371291311	-1,1166326	-0,5431447
1800	0,371404007	-1,114711	-0,5412372
2100	0,362992512	-1,2632303	-0,6842599
2400	0,367517816	-1,182014	-0,6070829
2700	0,368548073	-1,1639591	-0,5896043
3000	0,379795071	-0,9763216	-0,3983114
3300	0,361392423	-1,2927254	-0,7117679
3600	0,373047224	-1,0868908	-0,5134173

(b) Umidade volumétrica medida e potencial matricial calculado através do modelo de van-Genuchten para a fronteira $z = 22\text{cm}$.

Time Variable Boundary Conditions

	Time [sec]	GWL [cm]
1	300	-741,949
2	600	-22,4401
3	900	-2,23734
4	1200	-1,29603
5	1500	-1,11663
6	1800	-1,11471
7	2100	-1,26323
8	2400	-1,18201
9	2700	-1,16396
10	3000	-0,976322
11	3300	-1,29273
12	3600	-1,08689

OK Cancel Previous ... Next ... Help ... Add Line Delete Line Default Time

(c) Descrição de valores para condição de contorno em $z = 22\text{cm}$.

Figura C.9: Especificação de condições de contorno superior e inferior.

A última janela do Hydrus para entrada de dados pode ser vista na figura (C.10). Esta janela de comandos resume, em forma de tabela, a discretização e distribuição espacial das propriedades do solo, condições iniciais e informações relacionadas SIMUNEK *et al.* (2008). Neste ponto, o usuário pode resumir e modificar os parâmetros configurados no módulo externo de perfil.

Para as análises feitas neste trabalho, a janela *Resumodoperfildesolo* foi usada apenas para descrever a condição inicial. Neste exemplo considerou-se o ajuste por polinômio feito através da equação (5.6). Inicialmente, construiu-se uma malha de tamanho $z = 22\text{cm}$ e $\Delta z = 1\text{cm}$. Como pode ser visto na figura (C.10b), para cada valor desta malha calculou-se, através da equação (5.6) a respectiva umidade volumétrica. Estes valores foram passados para a tabela do Hydrus, representada pela figura (C.10a). Observe que, na posição $z = 0$ desta tabela foi colocado o valor $0,436\text{cm}^3.\text{cm}^{-3}$, correspondente à condição de fronteira superior para o horizonte A, cujo valor representa a umidade próxima à saturação na superfície do solo.

Após este passo, o *software* soluciona a equação de Richards segundo as informações fornecidas, retornando as imagens segundo as orientações do usuário e salvando-as em arquivo texto na pasta destinada à esta tarefa.

Soil Profile Summary								
	z [cm]	theta	Root [1/cm]	Axz	Bxz	Dxz	Mat	
1	0	0,43656	0	1	1	1	1	
2	1	0,0749285	0	1	1	1	1	
3	2	0,0751402	0	1	1	1	1	
4	3	0,0752814	0	1	1	1	1	
5	4	0,0753561	0	1	1	1	1	
6	5	0,0753685	0	1	1	1	1	
7	6	0,0753228	0	1	1	1	1	
8	7	0,0752232	0	1	1	1	1	
9	8	0,0750737	0	1	1	1	1	
10	9	0,0748786	0	1	1	1	1	
11	10	0,074642	0	1	1	1	1	
12	11	0,074368	0	1	1	1	1	
13	12	0,0740609	0	1	1	1	1	
14	13	0,0737247	0	1	1	1	1	
15	14	0,0733636	0	1	1	1	1	

Set to Default Values

Set Initial Conditions Equal to Field Capacity

OK

Cancel

Previous

Next

Help

(a) Janela do *software* Hydrus para resumo do perfil de solo

Profundidade (cm)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Umidade (cm ³ .cm ⁻³)	0,0746	0,0749	0,0751	0,0753	0,0754	0,0754	0,0753	0,0752	0,0751	0,0749	0,0746	0,0744	0,0741	0,0737	0,0734	0,073	0,0726	0,0722	0,0718	0,0713	0,0709	0,0705	0,0701

(b) Tabela de dados de condição inicial utilizada para ajustar curva de condição inicial referente ao horizonte A co perfil de solo

Figura C.10: Resumo do perfil de solo.

Apêndice D

Código em Octave

D.1 Ensaio 1

Sub-rotina para cálculo da condutividade hidráulica média na interface dos volumes de controle ($K_{i\pm 1/2}$). Esta sub-rotina foi usada em todos os ensaios.

```
1 function [Kneg,Kpos]=Media(K,nz,w)
2
3 KMed = zeros(nz-2,1);
4
5 for i = 2:nz; KMed(i-1) = w*K(i-1)+(1-w)*K(i); end
6
7 Kneg = KMed(1:nz-2); %Kneg = K_{i-1/2}
8 Kpos = KMed(2:nz-1); %Kpos = K_{i+1/2}
9 end
```

Sub-rotina para modelo de (VAN GENUCHTEN, 1980), considerando entradas em função de umidade volumétrica:

```
1 function [C,K,h] = vanGenuchten(theta,phi)
2
3 alpha = phi(1);
4 theta_S = phi(2);
5 theta_R = phi(3);
6 n = phi(4);
7 m = phi(5);
8 Ksat = phi(6);
```

Calcula o potencial matricial:

```
1 h = (-1).*(1/alpha).*((((theta_S-theta_R)./(theta-theta_R))
    .^(1/m))-1).^(1/n));
```

Calcula a saturação efetiva:

```
1 Se = ((theta - theta_R)./(theta_S - theta_R));
```

Calcula a condutividade hidráulica:

```
1 K = Ksat.*Se.^(1/2).*(1 - (1 - Se.^(1/m)).^m).^2;
```

Calcula a capacidade hídrica:

```
1 C = (alpha.*m.*n.*sign(h).*(alpha.*abs(h)).^(n - 1).*(theta_R  
- theta_S))./((alpha.*abs(h)).^n + 1).^(m + 1);
```

```
2
```

```
3 end
```

Sub-rotina para modelo de (VAN GENUCHTEN, 1980), considerando entradas em função de potencial matricial:

```
1 function [C,K,theta] = vanGenuchten(h,phi)
```

```
2
```

```
3 alpha = phi(1);
```

```
4 theta_S = phi(2);
```

```
5 theta_R = phi(3);
```

```
6 n = phi(4);
```

```
7 m = phi(5);
```

```
8 Ksat = phi(6);
```

Calcula a umidade volumétrica:

```
1 theta = (theta_S - theta_R)./(1 + (alpha.*abs(h)).^n).^m +  
theta_R;
```

Calcula a saturação efetiva:

```
1 Se = ((theta - theta_R)./(theta_S - theta_R));
```

Calcula a condutividade hidráulica:

```
1 K = Ksat.*Se.^(1/2).*(1 - (1 - Se.^(1/m)).^m).^2;
```

Calcula a capacidade hídrica:

```
1 C = (alpha.*m.*n.*sign(h).*(alpha.*abs(h)).^(n - 1).*(theta_R  
- theta_S))./((alpha.*abs(h)).^n + 1).^(m + 1);
```

```
2
```

```
3 end
```

D.1.1 Horizonte A

A seguir será apresentado o código principal, referente ao horizonte A do perfil de solo, usado para obter os resultados de simulação apresentados na seção (5.3.1).

Parâmetros para condição de parada do método de Picard:

```
1 eps      = 0.01;
2 cont     = 0;
3 iteMax    = 10;
```

Parâmetros para curva de retenção da água no solo:

```
1 alpha     = 0.94280;
2 theta_S   = 0.4446;
3 theta_R   = 0.054;
4 n         = 1.3983;
5 m         = 1 - 1/n;
6 Ksat      = 0.02209;
7
8 phi(1)    = alpha;
9 phi(2)    = theta_S;
10 phi(3)    = theta_R;
11 phi(4)    = n;
12 phi(5)    = m;
13 phi(6)    = Ksat;
14 phi      = phi';
```

Definição da malha espacial:

```
1 dz       = 1; % [cm]
2 zFundo   = 0; % [cm] min
3 zTopo    = 22; % [cm] max
4 z        = (zFundo:dz:zTopo)';
5 nz       = length(z);
```

Definição da malha temporal:

```
1 dt       = 1; % [s]
2 tmin     = 0; % [s]
3 tmax     = 3600; % [s]
4 t        = (tmin:dt:tmax)';
5 nt       = length(t);
6
7 psi(1)    = tmin;
8 psi(2)    = tmax;
9 psi(3)    = zFundo;
10 psi(4)    = zTopo;
```

```
11 psi      = psi';
```

Declarando matrizes e vetores:

```
1 mat = zeros(nz-2,nz-2);
2 H = zeros(nz,nt);
3 THETA = zeros(nz,nt);
4 delta_m = ones(nz,1);
5 R = zeros(nz-2,1);
6 p = zeros(1,nz-2);
7 q = p;
8 r = p;
9 hm1 = p;
```

Vetor para condição de fronteira no topo:

```
1 for i=1:nt
2     thetaTopo(i) = 0.43656;
3 end
```

Vetor para condição de fronteira no fundo:

```
1 for i=1:nt
2     thetaFundo(i) = (1.0999e-11*(t(i)^3)) - (1.0622e-07*(t(i)
        ^2)) + (3.2115e-04*t(i)) + 7.0078e-02;
3 end
```

Vetor para condição inicial:

```
1 for i=1:nz
2     thetaIni(i) = (6.9268e-07*(z(i)^3)) - (3.9452e-05*(z(i)^2))
        + (3.2525e-04*z(i)) + 7.4642e-02;
3 end
4 thetaIni(nz) = thetaTopo(1);
5 thetaIni(1) = thetaFundo(1);
```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condição inicial:

```
1 [CIni,KIni,hIni] = vgtheta(thetaIni,phi);
2 thetaIni(2:nz-1) = flipud(thetaIni(2:nz-1)');
3 thetaj = thetaIni;
4 H(:,1) = hIni;
5 THETA(:,1) = thetaIni;
```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condição inicial:

```

1 [CFundo,KFundo,hFundo] = vgtheta(thetaFundo,phi);
2 H(1,:) = hFundo;
3 [CTopo,KTopo,hTopo] = vgtheta(thetaTopo,phi);
4 H(nz,:) = hTopo;

```

Desenvolvimento do método de volumes finitos com iterações de Picard. O passo inicial foi o mesmo vetor de condição inicial

```

1 for j=2:nt
2     hm = H(:,j-1);
3
4     while(max(abs(delta_m))>eps && cont<iteMax)
5
6         [Cm,Km,thetam] = vanGenuchten(hm,phi);
7         [Kmneg,Kmpos] = Media(Km,nz,0.5);
8
9         p = -Kmneg/dz^2;
10        q = Cm(2:nz-1,1)/dt+(Kmneg+Kmpos)/dz^2;
11        r = -Kmpos/dz^2;
12
13        for i = 2:nz-1
14            R(i-1) = (Kmpos(i-1)*(hm(i+1)-hm(i)) - Kmneg(i-1)
15                    *(hm(i)-hm(i-1)))/dz^2 + (Kmpos(i-1)-Kmneg(i-1))/dz
16                    -(thetam(i)-thetaj(i))/dt;
17        end
18
19        mat = diag(p(2:nz-2),-1)+diag(q)+ diag(r(1:nz-3),+1)
20        ;
21
22        delta_m = mat\R;
23        hm1 = delta_m+hm(2:nz-1);
24        hm(2:nz-1) = hm1;
25
26        cont = cont+1;
27    end
28
29    [Cm,Km,thetaj] = vanGenuchten(hm,phi);
30    THETA(:,j) = thetaj;
31    H(2:nz,j) = hm(2:nz);
32
33    delta_m =ones(nz-2,1);

```

```

31         cont = 0;
32     end
33
34     hFinal = H(:,nt);
35     [CFinal,KFinal,thetaFinal] = vanGenuchten(hFinal,phi);

```

Cálculo de erro relativo para análise de convergência:

```

1  s1=0;
2  d1=0;
3  s2=0;
4
5  for j = 1:(nt-1)
6      for i = 1:(nz)
7          d1 = THETA(i,j+1)-THETA(i,j);
8          s1 = s1+(d1^2);
9          s2 = s2+(THETA(i,j+1)^2);
10 end
11 Q = soma1(j)/soma2(j);
12 err(j) = 100*sqrt(Q);
13 end
14
15 Q1 = s1/s2;
16 E2 = sqrt(Q1)

```

D.1.2 Horizonte E

A seguir será apresentado o código principal, referente ao horizonte E do perfil de solo, usado para obter os resultados de simulação apresentados na seção (5.3.1).

Parâmetros para condição de parada do método de Picard:

```
1 eps      = 0.01;
2 cont     = 0;
3 iteMax   = 10;
```

Parâmetros para curva de retenção da água no solo:

```
1 alpha    = 0.7775;
2 theta_S  = 0.398;
3 theta_R  = 0.033;
4 n        = 1.4165;
5 m        = 1 - 1/n;
6 Ksat     = 0.00673;
7
8 phi(1)   = alpha;
9 phi(2)   = theta_S;
10 phi(3)   = theta_R;
11 phi(4)   = n;
12 phi(5)   = m;
13 phi(6)   = Ksat;
14 phi     = phi';
```

Definição da malha espacial:

```
1 dz      = 1; % [cm]
2 zFundo  = 22; % [cm]
3 zTopo   = 69; % [cm]
4 z       = (zFundo:dz:zTopo)';
5 nz      = length(z);
```

Definição da malha temporal:

```
1 dt      = 1; % [s]
2 tmin    = 0; % [s]
3 tmax    = 3600; % [s]
4 t       = (tmin:dt:tmax)';
5 nt      = length(t);
6
7 psi(1)  = tmin;
8 psi(2)  = tmax;
9 psi(3)  = zFundo;
10 psi(4) = zTopo;
```

```
11 psi      = psi';
```

Declarando matrizes e vetores:

```
1 mat = zeros(nz-2,nz-2);
2 H = zeros(nz,nt);
3 THETA = zeros(nz,nt);
4 delta_m = ones(nz,1);
5 R = zeros(nz-2,1);
6 p = zeros(1,nz-2);
7 q = p;
8 r = p;
9 hm1 = p;
```

Vetor para condição de fronteira no fundo:

```
1 for i=1:nt
2     thetaFundo(i) = (-8.9117e-12*(t(i)^3)) + (5.4396e-08*(t(i)
      ^2)) - (5.6450e-05*t(i)) + 2.5157e-01;
3 end
```

Vetor para condição de fronteira no topo:

```
1 for i=1:nt
2     thetaTopo(i) = (1.0999e-11*(t(i)^3)) - (1.0622e-07*(t(i)^2)
      ) + (3.2115e-04*t(i)) + 7.0078e-02;
3 end
```

Vetor para condição inicial:

```
1 for i=1:nz
2     thetaIni(i) = (-6.9080e-06*(z(i)^3)) + (9.8992e-04*(z(i)^2)
      ) - (3.9638e-02*z(i)) + 5.4108e-01;
3 end
4 thetaIni(nz) = thetaTopo(1);
5 thetaIni(1) = thetaFundo(1);
```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condição inicial:

```
1 [CIni,KIni,hIni] = vanGenuchtenTHETA(thetaIni,phi);
2 thetaIni(2:nz-1) = flipud(thetaIni(2:nz-1)');
3 thetaj = thetaIni;
4 H(:,1) = hIni;
5 THETA(:,1) = thetaIni;
```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condições de fronteira:

```

1 [CFundo,KFundo,hFundo] = vanGenuchtenTHETA(thetaFundo,phi);
2 H(1,:) = hFundo;
3 [CTopo,KTopo,hTopo] = vanGenuchtenTHETA(thetaTopo,phi);
4 H(nz,:) = hTopo;

```

Desenvolvimento do método de volumes finitos com iterações de Picard. O passo inicial foi o mesmo vetor de condição inicial.

```

1 for j=2:nt
2     hm = H(:,j-1);
3
4     while(max(abs(delta_m))>eps && cont<iteMax)
5
6         [Cm,Km,thetam] = vanGenuchten(hm,phi);
7         [Kmneg,Kmpos] = Media(Km,nz,0.5);
8
9         p = -Kmneg/dz^2;
10        q = Cm(2:nz-1,1)/dt+(Kmneg+Kmpos)/dz^2;
11        r = -Kmpos/dz^2;
12
13        for i = 2:nz-1
14            R(i-1) = (Kmpos(i-1)*(hm(i+1)-hm(i)) - Kmneg(i-1)
15                    *(hm(i)-hm(i-1)))/dz^2 + (Kmpos(i-1)-Kmneg(i-1))/dz
16                    -(thetam(i)-thetaj(i))/dt;
17        end
18
19        mat = diag(p(2:nz-2),-1)+diag(q)+ diag(r(1:nz-3),+1)
20            ;
21
22        delta_m = mat\R;
23        hm1 = delta_m+hm(2:nz-1);
24        hm(2:nz-1) = hm1;
25
26        cont = cont+1;
27    end
28
29    [Cm,Km,thetaj] = vanGenuchten(hm,phi);
30    THETA(:,j) = thetaj;
31    H(2:nz,j) = hm(2:nz);
32
33    delta_m =ones(nz-2,1);

```

```

31     cont = 0;
32 end
33
34 hFinal = H(:,nt);
35 [CFinal,KFinal,thetaFinal] = vanGenuchten(hFinal,phi);

```

Cálculo de erro relativo para análise de convergência:

```

1  s1=0;
2  d1=0;
3  s2=0;
4
5  for j = 1:(nt-1)
6      for i = 1:(nz)
7          d1 = THETA(i,j+1)-THETA(i,j);
8          s1 = s1+(d1^2);
9          s2 = s2+(THETA(i,j+1)^2);
10 end
11 Q = soma1(j)/soma2(j);
12 err(j) = 100*sqrt(Q);
13 end
14
15 Q1 = s1/s2;
16 E2 = sqrt(Q1)

```

D.2 Ensaio 2

Sub-rotina para cálculo de condições de fronteira e inicial:

```
1 function [y] = f(rho,x)
2
3 a1      = rho(1);
4 a2      = rho(2);
5 x0      = rho(3);
6 DX      = rho(4);
7
8 y = a2+((a1 - a2)./(1+exp((x-x0)./DX)));
9
10 end
```

D.2.1 Horizonte A

A seguir será apresentado o código principal, referente ao horizonte A do perfil de solo, usado para obter os resultados de simulação apresentados na seção (5.3.2).

Parâmetros para condição de parada do método de Picard:

```
1 eps      = 0.01;
2 cont     = 0;
3 iteMax   = 10;
```

Parâmetros para curva de retenção da água no solo:

```
1 alpha    = 0.94280;
2 theta_S  = 0.4446;
3 theta_R  = 0.054;
4
5 n        = 1.3983;
6 m        = 1 - 1/n;
7 Ksat     = 0.02209;
8
9 phi(1)   = alpha;
10 phi(2)   = theta_S;
11 phi(3)   = theta_R;
12 phi(4)   = n;
13 phi(5)   = m;
14 phi(6)   = Ksat;
15 phi     = phi';
```

Parâmetros para condição inicial:

```
1 a1 = 0.07242;
2 a2 = 0.24956;
3 x0 = 49.57146;
4 DX = 3.8279;
5
6 rho(1) = a1;
7 rho(2) = a2;
8 rho(3) = x0;
9 rho(4) = DX;
10 rho = rho';
```

Parâmetros para condição de fronteira $z = 22\text{cm}$:

```
1 b1 = 0.06843;
2 b2 = 0.36934;
3 y0 = 688.75404;
4 DY = 130.13776;
5
6 eta(1) = b1;
7 eta(2) = b2;
8 eta(3) = y0;
9 eta(4) = DY;
10 eta = eta';
```

Definição da malha espacial:

```
1 dz = 1; % [cm]
2 zFundo = 0; % [cm]
3 zTopo = 22; % [cm]
4 z = (zFundo:dz:zTopo)';
5 nz = length(z);
```

Definição da malha temporal:

```
1 dt = 1; % [s]
2 tmin = 0; % [s]
3 tmax = 3600; % [s]
4 t = (tmin:dt:tmax)';
5 nt = length(t);
6
7 psi(1) = tmin;
8 psi(2) = tmax;
9 psi(3) = zFundo;
10 psi(4) = zTopo;
```

```
11 psi      = psi';
```

Declarando matrizes e vetores:

```
1 mat = zeros(nz-2,nz-2);
2 H = zeros(nz,nt);
3 THETA = zeros(nz,nt);
4 delta_m = ones(nz,1);
5 R = zeros(nz-2,1);
6 p = zeros(1,nz-2);
7 q = p;
8 r = p;
9 hm1 = p;
```

Vetor para condição de fronteira no topo:

```
1 for i=1:nt
2 thetaTopo(i) = 0.43656;
3 end
```

Vetor para condição de fronteira no fundo:

```
1 thetaFundo = f(eta,t);
```

Vetor para condição inicial

```
1 thetaIni = f(rho,z);
2 thetaIni(nz) = thetaTopo(1);
3 thetaIni(1) = thetaFundo(1);
```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condição inicial:

```
1 [CIni,KIni,hIni] = vgtheta(thetaIni,phi);
2 thetaIni(2:nz-1) = flipud(thetaIni(2:nz-1));
3 thetaj = thetaIni;
4 H(:,1) = hIni;
5 THETA(:,1) = thetaIni;
```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condições de fronteira:

```
1 [CFundo,KFundo,hFundo] = vgtheta(thetaFundo,phi);
2 H(1,:) = hFundo;
3 [CTopo,KTopo,hTopo] = vgtheta(thetaTopo,phi);
4 H(nz,:) = hTopo;
```

Desenvolvimento do método de volumes finitos com iterações de Picard. O passo inicial foi o mesmo vetor de condição inicial.

```

1  for j=2:nt
2      hm = H(:,j-1);
3
4      while(max(abs(delta_m))>eps && cont<iteMax)
5
6          [Cm,Km,thetam] = vanGenuchten(hm,phi);
7          [Kmneg,Kmpos] = Media(Km,nz,0.5);
8
9          p = -Kmneg/dz^2;
10         q = Cm(2:nz-1,1)/dt+(Kmneg+Kmpos)/dz^2;
11         r = -Kmpos/dz^2;
12
13         for i = 2:nz-1
14             R(i-1) = (Kmpos(i-1)*(hm(i+1)-hm(i)) - Kmneg(i-1)
15                     *(hm(i)-hm(i-1)))/dz^2 + (Kmpos(i-1)-Kmneg(i-1))/dz
16                     -(thetam(i)-thetaj(i))/dt;
17         end
18
19         mat = diag(p(2:nz-2),-1)+diag(q)+ diag(r(1:nz-3),+1)
20             ;
21
22         delta_m = mat\R;
23         hm1 = delta_m+hm(2:nz-1);
24         hm(2:nz-1) = hm1;
25
26         cont = cont+1;
27     end
28
29     [Cm,Km,thetaj] = vanGenuchten(hm,phi);
30     THETA(:,j) = thetaj;
31     H(2:nz,j) = hm(2:nz);
32
33     delta_m =ones(nz-2,1);
34     cont = 0;
35 end
36
37 hFinal = H(:,nt);
38 [CFinal,KFinal,thetaFinal] = vanGenuchten(hFinal,phi);

```

Cálculo de erro relativo para análise de convergência:

```

1  s1=0;
2  d1=0;

```

```

3  s2=0;
4
5  for j = 1:(nt-1)
6      for i = 1:(nz)
7          d1 = THETA(i,j+1)-THETA(i,j);
8          s1 = s1+(d1^2);
9          s2 = s2+(THETA(i,j+1)^2);
10 end
11 Q = soma1(j)/soma2(j);
12 err(j) = 100*sqrt(Q);
13 end
14
15 Q1 = s1/s2;
16 E2 = sqrt(Q1)

```

D.2.2 Horizonte E

A seguir será apresentado o código principal, referente ao horizonte E do perfil de solo, usado para obter os resultados de simulação apresentados na seção (5.3.2).

Parâmetros para condição de parada do método de Picard:

```

1  eps      = 0.01;
2  cont     = 0;
3  iteMax   = 10;

```

Parâmetros para curva de retenção da água no solo:

```

1  alpha    = 0.7775;
2  theta_S  = 0.398;
3  theta_R  = 0.033;
4  n        = 1.4165;
5  m        = 1 - 1/n;
6  Ksat     = 0.00673;
7
8  phi(1)   = alpha;
9  phi(2)   = theta_S;
10 phi(3)   = theta_R;
11 phi(4)   = n;
12 phi(5)   = m;
13 phi(6)   = Ksat;
14 phi      = phi';

```

Definição da malha espacial:

```

1  dz      = 1; % [cm]

```

```

2 zFundo = 22; % [cm]
3 zTopo = 69; % [cm]
4 z      = (zFundo:dz:zTopo)';
5 nz     = length(z);

```

Definição da malha temporal:

```

1 dt      = 1; % [s]
2 tmin    = 0; % [s]
3 tmax    = 3600; % [s]
4 t       = (tmin:dt:tmax)';
5 nt      = length(t);
6
7 psi(1)  = tmin;
8 psi(2)  = tmax;
9 psi(3)  = zFundo;
10 psi(4) = zTopo;
11 psi    = psi';

```

Declarando matrizes e vetores:

```

1 mat = zeros(nz-2,nz-2);
2 H   = zeros(nz,nt);
3 THETA = zeros(nz,nt);
4 delta_m = ones(nz,1);
5 R       = zeros(nz-2,1);
6 p       = zeros(1,nz-2);
7 q       = p;
8 r       = p;
9 hm1     = p;

```

Parâmetros para condição inicial:

```

1 a1 = 0.07242;
2 a2 = 0.24956;
3 DX = 3.8279;
4 x0 = 49.57146;
5
6 rho(1) = a1;
7 rho(2) = a2;
8 rho(3) = x0;
9 rho(4) = DX;
10 rho = rho';

```

Parâmetros para condição de fronteira $z = 69\text{cm}$:

```

1 b1 = 0.06843;

```

```

2  b2 = 0.36934;
3  y0 = 688.75404;
4  DY = 130.13776;
5
6  eta(1) = b1;
7  eta(2) = b2;
8  eta(3) = y0;
9  eta(4) = DY;
10 eta = eta';

```

Parâmetros para condição de fronteira $z = 22cm$:

```

1  c1 = 0.24278;
2  c2 = 0.33347;
3  w0 = 2057.68241;
4  DW = 233.7835;
5
6  pi(1) = c1;
7  pi(2) = c2;
8  pi(3) = w0;
9  pi(4) = DW;
10 pi = pi';

```

Vetor para condição de fronteira no topo:

```

1  thetaTopo = f(eta,t);

```

Vetor para condição de fronteira no fundo:

```

1  thetaFundo = f(pi,t);

```

Vetor para condição inicial:

```

1  thetaIni = f(rho,z);
2  thetaIni(nz) = thetaTopo(1);
3  thetaIni(1) = thetaFundo(1);

```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condição inicial:

```

1  [CIni,KIni,hIni] = vanGenuchtenTHETA(thetaIni,phi);
2  thetaIni(2:nz-1) = flipud(thetaIni(2:nz-1));
3  thetaj = thetaIni;
4  H(:,1) = hIni;
5  THETA(:,1) = thetaIni;

```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condições de fronteira:

```

1 [CFundo,KFundo,hFundo] = vanGenuchtenTHETA(thetaFundo,phi);
2 H(1,:) = hFundo;
3 [CTopo,KTopo,hTopo] = vanGenuchtenTHETA(thetaTopo,phi);
4 H(nz,:) = hTopo;

```

Desenvolvimento do método de volumes finitos com iterações de Picard. O passo inicial foi o mesmo vetor de condição inicial:

```

1 for j=2:nt
2     hm = H(:,j-1);
3
4     while(max(abs(delta_m))>eps && cont<iteMax)
5
6         [Cm,Km,thetam] = vanGenuchten(hm,phi);
7         [Kmneg,Kmpos] = Media(Km,nz,0.5);
8
9         p = -Kmneg/dz^2;
10        q = Cm(2:nz-1,1)/dt+(Kmneg+Kmpos)/dz^2;
11        r = -Kmpos/dz^2;
12
13        for i = 2:nz-1
14            R(i-1) = (Kmpos(i-1)*(hm(i+1)-hm(i)) - Kmneg(i-1)
15                    *(hm(i)-hm(i-1)))/dz^2 + (Kmpos(i-1)-Kmneg(i-1))/dz - (thetam(i)-thetaj(i))/dt;
16
17        end
18
19        mat = diag(p(2:nz-2),-1)+diag(q)+ diag(r(1:nz-3),+1)
20            ;
21
22        delta_m = mat\R;
23        hm1 = delta_m+hm(2:nz-1);
24        hm(2:nz-1) = hm1;
25
26        cont = cont+1;
27    end
28
29    [Cm,Km,thetaj] = vanGenuchten(hm,phi);
30    THETA(:,j) = thetaj;
31    H(2:nz,j) = hm(2:nz);
32
33    delta_m =ones(nz-2,1);
34    cont = 0;
35 end

```

33

```
34 hFinal = H(:,nt);
```

```
35 [CFinal,KFinal,thetaFinal] = vanGenuchten(hFinal,phi);
```

Cálculo de erro relativo para análise de convergência:

```
1 s1=0;
```

```
2 d1=0;
```

```
3 s2=0;
```

4

```
5 for j = 1:(nt-1)
```

```
6   for i = 1:(nz)
```

```
7     d1 = THETA(i,j+1)-THETA(i,j);
```

```
8     s1 = s1+(d1^2);
```

```
9     s2 = s2+(THETA(i,j+1)^2);
```

```
10 end
```

```
11 Q = soma1(j)/soma2(j);
```

```
12 err(j) = 100*sqrt(Q);
```

```
13 end
```

14

```
15 Q1 = s1/s2;
```

```
16 E2 = sqrt(Q1)
```

D.3 Ensaio 3

Sub-rotina para modelo de (BROOKS e COREY, 1964), considerando entradas em função da umidade volumétrica:

```
1 function [C,K,h] = thetabc(theta,phi)
2
3 Ksat      = phi(1);
4 theta_S   = phi(2);
5 theta_R   = phi(3);
6 hb        = phi(4);
7 lambda    = phi(5);
```

Calcula a saturação efetiva:

```
1 Se = ((theta - theta_R)./(theta_S - theta_R));
```

Calcula o potencial matricial:

```
1 h = -hb.*((Se).^(-1/lambda));
```

Calcula a condutividade hidráulica:

```
1 K = Ksat.*(Se.^((2/lambda)+2.5));
```

Calcula a capacidade hídrica:

```
1 C = (lambda./hb).*(theta_S - theta_R).*((hb./abs(h)).^(lambda
    +1));
2
3 end
```

Sub-rotina para modelo de (BROOKS e COREY, 1964), considerando entradas em função do potencial matricial:

```
1 function [C,K,theta] = brooks(h,phi)
2
3 Ksat      = phi(1);
4 theta_S   = phi(2);
5 theta_R   = phi(3);
6 hb        = phi(4);
7 lambda    = phi(5);
```

Calcula a umidade volumétrica:

```
1 theta = ((theta_S - theta_R).*((abs(h)./hb).^(-lambda))) +
    theta_R;
```

Calcula a saturação efetiva:

```
1 Se = ((theta - theta_R)./(theta_S - theta_R));
```

Calcula a condutividade hidráulica:

```
1 K = Ksat.*(Se.^((2/lambda)+2.5));
```

Calcula a capacidade hídrica:

```
1 C = (lambda./hb).*(theta_S - theta_R).*((hb./abs(h)).^(lambda  
    +1));  
2  
3 end
```

D.3.1 Horizonte A

A seguir será apresentado o código principal, referente ao horizonte A do perfil de solo, usado para obter os resultados de simulação apresentados na seção (5.3.4).

Parâmetros para condição de parada do método de Picard:

```
1 eps      = 0.01;  
2 cont     = 0;  
3 iteMax   = 10;
```

Parâmetros para curva de retenção da água no solo:

```
1 Ksat      = 0.022092;  
2 theta_S   = 0.4446;  
3 theta_R   = 0.054;  
4 hb        = 1.0515;  
5 lambda    = 0.39775;  
6  
7 phi(1) = Ksat;  
8 phi(2) = theta_S;  
9 phi(3) = theta_R;  
10 phi(4) = hb;  
11 phi(5) = lambda;  
12 phi    = phi';
```

Definição da malha espacial:

```
1 dz      = 1; % [cm]  
2 zFundo  = 0; % [cm]  
3 zTopo   = 22; % [cm]  
4 z       = (zFundo:dz:zTopo)';  
5 nz      = length(z);
```

Definição da malha temporal:

```
1 dt      = 1; % [s]  
2 tmin    = 0; % [s]
```

```

3  tmax = 3600; % [s]
4  t     = (tmin:dt:tmax)';
5  nt    = length(t);
6
7  psi(1) = tmin;
8  psi(2) = tmax;
9  psi(3) = zFundo;
10 psi(4) = zTopo;
11 psi    = psi';

```

Declarando matrizes e vetores:

```

1  mat = zeros(nz-2,nz-2);
2  H = zeros(nz,nt);
3  THETA = zeros(nz,nt);
4  delta_m = ones(nz,1);
5  R = zeros(nz-2,1);
6  p = zeros(1,nz-2);
7  q  = p;
8  r  = p;
9  hm1 = p;

```

Vetor para condição de fronteira no topo:

```

1  for i=1:nt
2      thetaTopo(i) = 0.43656;
3  end

```

Vetor para condição de fronteira no fundo:

```

1  for i=1:nt
2      thetaFundo(i) = (1.0999e-11*(t(i)^3)) - (1.0622e-07*(t(i)
        ^2)) + (3.2115e-04*t(i)) + 7.008e-02;
3  end

```

Vetor para condição inicial:

```

1  for i=1:nz
2      thetaIni(i) = (6.9268e-07*(z(i)^3)) - (3.9452e-05*(z(i)^2))
        + (3.2525e-04*z(i)) + 7.4642e-02;
3  end
4
5  thetaIni(nz) = thetaTopo(1);
6  thetaIni(1) = thetaFundo(1);

```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condição inicial:

```

1 [CIni,KIni,hIni] = thetabc(thetaIni,phi);
2 thetaIni(2:nz-1) = flipud(thetaIni(2:nz-1));
3 thetaj = thetaIni;
4 H(:,1) = hIni;
5 THETA(:,1) = thetaIni;

```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condições de fronteira:

```

1 [CFundo,KFundo,hFundo] = thetabc(thetaFundo,phi);
2 H(1,:) = hFundo;
3 [CTopo,KTopo,hTopo] = thetabc(thetaTopo,phi);
4 H(nz,:) = hTopo;

```

Desenvolvimento do método de volumes finitos com iterações de Picard. O passo inicial foi o mesmo vetor de condição inicial.

```

1 for j=2:nt
2     hm = H(:,j-1);
3
4     while(max(abs(delta_m))>eps && cont<iteMax)
5
6         [Cm,Km,thetam] = brooks(hm,phi);
7         [Kmneg,Kmpos] = Media(Km,nz,0.5);
8
9         p = -Kmneg/dz^2;
10        q = Cm(2:nz-1,1)/dt+(Kmneg+Kmpos)/dz^2;
11        r = -Kmpos/dz^2;
12
13        for i = 2:nz-1
14            R(i-1) = (Kmpos(i-1)*(hm(i+1)-hm(i)) - Kmneg(i-1)
15                    *(hm(i)-hm(i-1)))/dz^2 + (Kmpos(i-1)-Kmneg(i-1))/dz - (thetam(i)-thetaj(i))/dt;
16
17        end
18
19        mat = diag(p(2:nz-2),-1)+diag(q)+ diag(r(1:nz-3),+1);
20        delta_m = mat\R;
21        hm1 = delta_m+hm(2:nz-1);
22        hm(2:nz-1) = hm1;
23
24        cont = cont+1;
25    end
26
27    [Cm,Km,thetaj] = brooks(hm,phi);

```

```

26     THETA(:,j) = thetaj;
27     H(2:nz,j) = hm(2:nz);
28     delta_m = ones(nz-2,1);
29     cont = 0;
30 end
31
32 hFinal = H(:,nt);
33 [CFinal,KFinal,thetaFinal] = brooks(hFinal,phi);

```

Cálculo de erro relativo para análise de convergência:

```

1  s1=0;
2  d1=0;
3  s2=0;
4
5  for j = 1:(nt-1)
6      for i = 1:(nz)
7          d1 = THETA(i,j+1)-THETA(i,j);
8          s1 = s1+(d1^2);
9          s2 = s2+(THETA(i,j+1)^2);
10 end
11 end
12
13 Q1 = s1/s2;
14 E2 = sqrt(Q1)

```

D.3.2 Horizonte E

A seguir será apresentado o código principal, referente ao horizonte E do perfil de solo, usado para obter os resultados de simulação apresentados na seção (5.3.4).

Parâmetros para condição de parada do método de Picard:

```

1  eps      = 0.01;
2  cont     = 0;
3  iteMax   = 10;

```

Parâmetros para curva de retenção da água no solo:

```

1  Ksat      = 0.006733;
2  theta_S   = 0.398;
3  theta_R   = 0.033;
4  hb        = 1.2774;
5  lambda    = 0.41607;
6
7  phi(1) = Ksat;

```

```

8 phi(2) = theta_S;
9 phi(3) = theta_R;
10 phi(4) = hb;
11 phi(5) = lambda;
12 phi      = phi';

```

Definição da malha espacial:

```

1 dz      = 1; % [cm]
2 zFundo  = 22; % [cm]
3 zTopo   = 69; % [cm]
4 z       = (zFundo:dz:zTopo)';
5 nz      = length(z);

```

Definição da malha temporal:

```

1 dt      = 1; % [s]
2 tmin    = 0; % [s]
3 tmax    = 3600; % [s]
4 t       = (tmin:dt:tmax)';
5 nt      = length(t);
6
7 psi(1)  = tmin;
8 psi(2)  = tmax;
9 psi(3)  = zFundo;
10 psi(4) = zTopo;
11 psi     = psi';

```

Declarando matrizes e vetores:

```

1 mat = zeros(nz-2,nz-2);
2 H = zeros(nz,nt);
3 THETA = zeros(nz,nt);
4 delta_m = ones(nz,1);
5 R = zeros(nz-2,1);
6 p = zeros(1,nz-2);
7 q  = p;
8 r  = p;
9 hm1 = p;

```

Vetor para condição de fronteira no fundo:

```

1 for i=1:nt
2     thetaFundo(i) = (-8.9117e-12*(t(i)^3)) + (5.4396e-08*(t(i)
        ^2)) - (5.6450e-05*t(i)) + 2.5157e-01;
3 end

```

Vetor para condição de fronteira no topo:

```

1 for i=1:nt
2     thetaTopo(i) =(1.0999e-11*(t(i)^3)) - (1.0622e-07*(t(i)^2))
        + (3.2115e-04*t(i)) + 7.0078e-02;
3 end

```

Vetor para condição inicial:

```

1 for i=1:nz
2     thetaIni(i) = (-6.9080e-06*(z(i)^3)) + (9.8992e-04*(z(i)^2)
        ) - (3.9638e-02*z(i)) + 5.4108e-01; %[cm]
3 end
4 thetaIni(1) = thetaTopo(1);
5 thetaIni(nz) = thetaFundo(1);

```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condição inicial:

```

1 [CIni,KIni,hIni] = thetabc(thetaIni,phi);
2 thetaIni(2:nz-1) = flipud(thetaIni(2:nz-1)');
3 H(:,1) = hIni;
4 thetaj = thetaIni;
5 THETA(:,1) = thetaIni;

```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condições de fronteira:

```

1 [CFundo,KFundo,hFundo] = thetabc(thetaFundo,phi);
2 H(1,:) = hFundo;
3 THETA(1,:) = thetaFundo;
4 [CTopo,KTopo,hTopo] = thetabc(thetaTopo,phi);
5 H(nz,:) = hTopo;

```

```

1 for j=2:nt
2     hm = H(:,j-1);
3
4     while(max(abs(delta_m))>eps && cont<iteMax)
5
6         [Cm,Km,thetam] = brooks(hm,phi);
7         [Kmneg,Kmpos] = Media(Km,nz,0.5);
8
9         p = -Kmneg/dz^2;
10        q = Cm(2:nz-1,1)/dt+(Kmneg+Kmpos)/dz^2;
11        r = -Kmpos/dz^2;
12
13        for i = 2:nz-1

```

```

14         R(i-1) = (Kmpos(i-1)*(hm(i+1)-hm(i)) - Kmneg(i-1)
                  *(hm(i)-hm(i-1)))/dz^2 + (Kmpos(i-1)-Kmneg(i
                  -1))/dz -(thetam(i)-thetaj(i))/dt;
15     end
16
17     mat = diag(p(2:nz-2),-1)+diag(q)+ diag(r(1:nz-3),+1);
18
19     delta_m = mat\R;
20     hm1 = delta_m+hm(2:nz-1);
21     hm(2:nz-1) = hm1;
22
23     cont = cont+1;
24 end
25
26 [Cm,Km,thetaj] = brooks(hm,phi);
27 THETA(:,j) = thetaj;
28 H(2:nz-1,j) = hm(2:nz-1);
29
30 delta_m =ones(nz-2,1);
31 cont = 0;
32 end
33
34 hFinal = H(:,nt);
35 [CFinal,KFinal,thetaFinal] = brooks(hFinal,phi);

```

Cálculo do erro relativo para análise de convergência:

```

1 s1=0;
2 d1=0;
3 s2=0;
4
5 for j = 1:(nt-1)
6     for i = 1:(nz)
7         d1 = THETA(i,j+1)-THETA(i,j);
8         s1 = s1+(d1^2);
9         s2 = s2+(THETA(i,j+1)^2);
10    end
11 end
12
13 Q1 = s1/s2;
14 E2 = sqrt(Q1)

```

D.4 Ensaio 4

As sub-rotinas para cálculo da curva de retenção segundo modelo de (BROOKS e COREY, 1964) e de $K_{i\pm 1/2}$, assim como a sub-rotina para cálculo do ajuste sigmoidal, usadas nesta seção, foram apresentadas nas seções anteriores deste mesmo apêndice.

D.4.1 Horizonte A

A seguir será apresentado o código principal, referente ao horizonte A do perfil de solo, usado para obter os resultados de simulação apresentados na seção (5.3.5).

Parâmetros para condição de parada do método de Picard:

```
1 eps      = 0.01;
2 cont     = 0;
3 iteMax    = 10;
```

Parâmetros para curva de retenção da água no solo:

```
1 Ksat      = 0.022092;
2 theta_S   = 0.4446;
3 theta_R   = 0.054;
4 hb        = 1.0515;
5 lambda    = 0.39775;
6
7 phi(1)    = Ksat;
8 phi(2)    = theta_S;
9 phi(3)    = theta_R;
10 phi(4)    = hb;
11 phi(5)    = lambda;
12 phi      = phi';
```

Parâmetros para condição inicial:

```
1 a1 = 0.07242;
2 a2 = 0.24956;
3 x0 = 49.57146;
4 DX = 3.8279;
5
6 rho(1) = a1;
7 rho(2) = a2;
8 rho(3) = x0;
9 rho(4) = DX;
10 rho = rho';
```

Parâmetros para condição de fronteira $z = 22cm$:

```

1 b1 = 0.06843;
2 b2 = 0.36934;
3 y0 = 688.75404;
4 DY = 130.13776;
5
6 eta(1) = b1;
7 eta(2) = b2;
8 eta(3) = y0;
9 eta(4) = DY;
10 eta = eta';

```

Definição da malha espacial:

```

1 dz = 1; %[cm]
2 zFundo = 0; %[cm]
3 zTopo = 22; %[cm]
4 z = (zFundo:dz:zTopo)';
5 nz = length(z);

```

Definição da malha temporal:

```

1 dt = 1; %[s]
2 tmin = 0; %[s]
3 tmax = 3600; [s]
4 t = (tmin:dt:tmax)';
5 nt = length(t);
6
7 psi(1) = tmin;
8 psi(2) = tmax;
9 psi(3) = zFundo;
10 psi(4) = zTopo;
11 psi = psi';

```

Declarando matrizes e vetores:

```

1 mat = zeros(nz-2,nz-2);
2 H = zeros(nz,nt);
3 THETA = zeros(nz,nt);
4 delta_m = ones(nz,1);
5 R = zeros(nz-2,1);
6 p = zeros(1,nz-2);
7 q = p;
8 r = p;
9 hm1 = p;

```

Vetor para condição de fronteira no topo:

```

1 for i=1:nt
2     thetaTopo(i) = 0.43656;
3 end

```

Vetor para condição de fronteira no fundo:

```

1 thetaFundo = f(eta,t);

```

Vetor para condição inicial:

```

1 thetaIni = f(rho,z);
2 thetaIni(nz) = thetaTopo(1);
3 thetaIni(1) = thetaFundo(1);

```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condição inicial:

```

1 [CIni,KIni,hIni] = thetabc(thetaIni,phi);
2 thetaIni(2:nz-1) = flipud(thetaIni(2:nz-1));
3 thetaj = thetaIni;
4 H(:,1) = hIni;
5 THETA(:,1) = thetaIni;

```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condições de fronteira:

```

1 [CFundo,KFundo,hFundo] = thetabc(thetaFundo,phi);
2 H(1,:) = hFundo;
3 [CTopo,KTopo,hTopo] = thetabc(thetaTopo,phi);
4 H(nz,:) = hTopo;

```

Desenvolvimento do método de volumes finitos com iterações de Picard. O passo inicial foi o mesmo vetor de condição inicial.

```

1 for j=2:nt
2     hm = H(:,j-1);
3
4     while(max(abs(delta_m))>eps && cont<iteMax)
5
6         [Cm,Km,thetam] = brooks(hm,phi);
7         [Kmneg,Kmpos] = Media(Km,nz,0.5);
8
9         p = -Kmneg/dz^2;
10        q = Cm(2:nz-1,1)/dt+(Kmneg+Kmpos)/dz^2;
11        r = -Kmpos/dz^2;
12
13        for i = 2:nz-1

```

```

14         R(i-1) = (Kmpos(i-1)*(hm(i+1)-hm(i)) - Kmneg(i-1)
                   *(hm(i)-hm(i-1)))/dz^2 + (Kmpos(i-1)-Kmneg(i
                   -1))/dz -(thetam(i)-thetaj(i))/dt;
15     end
16
17     mat = diag(p(2:nz-2),-1)+diag(q)+ diag(r(1:nz-3),+1);
18     delta_m = mat\R;
19     hm1 = delta_m+hm(2:nz-1);
20     hm(2:nz-1) = hm1;
21
22     cont = cont+1;
23 end
24
25 [Cm,Km,thetaj] = brooks(hm,phi);
26 THETA(:,j) = thetaj;
27 H(2:nz,j) = hm(2:nz);
28 delta_m = ones(nz-2,1);
29 cont = 0;
30 end
31
32 hFinal = H(:,nt);
33 [CFinal,KFinal,thetaFinal] = brooks(hFinal,phi);

```

Cálculo de erro relativo para análise de convergência:

```

1  s1=0;
2  d1=0;
3  s2=0;
4
5  for j = 1:(nt-1)
6      for i = 1:(nz)
7          d1 = THETA(i,j+1)-THETA(i,j);
8          s1 = s1+(d1^2);
9          s2 = s2+(THETA(i,j+1)^2);
10 end
11 end
12
13 Q1 = s1/s2;
14 E2 = sqrt(Q1)

```

D.4.2 Horizonte E

A seguir será apresentado o código principal, referente ao horizonte E do perfil de solo, usado para obter os resultados de simulação apresentados na seção (5.3.5).

Parâmetros para condição de parada do método de Picard:

```
1 eps      = 0.01;
2 cont     = 0;
3 iteMax    = 10;
```

Parâmetros para curva de retenção da água no solo:

```
1 Ksat      = 0.006733;
2 theta_S   = 0.398;
3 theta_R   = 0.033;
4 hb        = 1.2774;
5 lambda    = 0.41607;
6
7 phi(1) = Ksat;
8 phi(2) = theta_S;
9 phi(3) = theta_R;
10 phi(4) = hb;
11 phi(5) = lambda;
12 phi    = phi';
```

Parâmetros para condição inicial:

```
1 a1 = 0.07242;
2 a2 = 0.24956;
3 x0 = 49.57146;
4 DX = 3.8279;
5
6 rho(1) = a1;
7 rho(2) = a2;
8 rho(3) = x0;
9 rho(4) = DX;
10 rho = rho';
```

Parâmetros para condição de fronteira $z = 69cm$:

```
1 b1 = 0.06843;
2 b2 = 0.36934;
3 y0 = 688.75404;
4 DY = 130.13776;
5
6 eta(1) = b1;
7 eta(2) = b2;
```

```

8 eta(3) = y0;
9 eta(4) = DY;
10 eta = eta';

```

Parâmetros para condição de fronteira $z = 22\text{cm}$:

```

1 c1 = 0.24278;
2 c2 = 0.33347;
3 w0 = 2057.68241;
4 DW = 233.7835;
5
6 pi(1) = c1;
7 pi(2) = c2;
8 pi(3) = w0;
9 pi(4) = DW;
10 pi = pi';

```

Definição da malha espacial:

```

1 dz = 1; % [cm]
2 zFundo = 22; % [cm]
3 zTopo = 69; % [cm]
4 z = (zFundo:dz:zTopo)';
5 nz = length(z);

```

Definição da malha temporal:

```

1 dt = 1; % [s]
2 tmin = 0; % [s]
3 tmax = 3600; % [s]
4 t = (tmin:dt:tmax)';
5 nt = length(t);
6
7 psi(1) = tmin;
8 psi(2) = tmax;
9 psi(3) = zFundo;
10 psi(4) = zTopo;
11 psi = psi';

```

Declarando matrizes e vetores:

```

1 mat = zeros(nz-2,nz-2);
2 H = zeros(nz,nt);
3 THETA = zeros(nz,nt);
4 delta_m = ones(nz,1);
5 R = zeros(nz-2,1);
6 p = zeros(1,nz-2);

```

```

7 q    = p;
8 r    = p;
9 hm1  = p;

```

Vetor para condição de fronteira no topo:

```

1 thetaTopo = f(eta,t);

```

Vetor para condição de fronteira no fundo:

```

1 thetaFundo = f(pi,t);

```

Vetor para condição inicial:

```

1 thetaIni = f(rho,z);
2 thetaIni(nz) = thetaTopo(1);
3 thetaIni(1) = thetaFundo(1);

```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condição inicial:

```

1 [CIni,KIni,hIni] = thetabc(thetaIni,phi);
2 thetaIni(2:nz-1) = flipud(thetaIni(2:nz-1));
3 H(:,1) = hIni;
4 thetaj = thetaIni;
5 THETA(:,1) = thetaIni;

```

Curva de retenção, condutividade hidráulica e capacidade hídrica para vetor de condições de fronteira:

```

1 [CFundo,KFundo,hFundo] = thetabc(thetaFundo,phi);
2 H(1,:) = hFundo;
3 [CTopo,KTopo,hTopo] = thetabc(thetaTopo,phi);
4 H(nz,:) = hTopo;

```

Desenvolvimento do método de volumes finitos com iterações de Picard. O passo inicial foi o mesmo vetor de condição inicial.

```

1 for j=2:nt
2     hm = H(:,j-1);
3
4     while(max(abs(delta_m))>eps && cont<iteMax)
5
6         [Cm,Km,thetam] = brooks(hm,phi);
7         [Kmneg,Kmpos] = Media(Km,nz,0.5);
8
9         p = -Kmneg/dz^2;
10        q = Cm(2:nz-1,1)/dt+(Kmneg+Kmpos)/dz^2;
11        r = -Kmpos/dz^2;

```

```

12
13     for i = 2:nz-1
14         R(i-1) = (Kmpos(i-1)*(hm(i+1)-hm(i)) - Kmneg(i-1)
                    *(hm(i)-hm(i-1)))/dz^2 + (Kmpos(i-1)-Kmneg(i
                    -1))/dz -(thetam(i)-thetaj(i))/dt;
15     end
16
17     mat = diag(p(2:nz-2),-1)+diag(q)+ diag(r(1:nz-3),+1);
18
19     delta_m = mat\R;
20     hm1 = delta_m+hm(2:nz-1);
21     hm(2:nz-1) = hm1;
22
23     cont = cont+1;
24 end
25
26 [Cm,Km,thetaj] = brooks(hm,phi);
27 THETA(:,j) = thetaj;
28 H(2:nz-1,j) = hm(2:nz-1);
29
30 delta_m = ones(nz-2,1);
31 cont = 0;
32 end
33
34 hFinal = H(:,nt);
35 [CFinal,KFinal,thetaFinal] = brooks(hFinal,phi);

```

Cálculo do erro relativo para análise de convergência:

```

1 s1=0;
2 d1=0;
3 s2=0;
4
5 for j = 1:(nt-1)
6     for i = 1:(nz)
7         d1 = THETA(i,j+1)-THETA(i,j);
8         s1 = s1+(d1^2);
9         s2 = s2+(THETA(i,j+1)^2);
10    end
11 end
12
13 Q1 = s1/s2;
14 E2 = sqrt(Q1)

```