

Aula 2: Paradoxos, Topologia, Geometria e Diversão

Nesta aula, trabalharemos mais com atividades manuais. Traremos algumas atividades envolvendo paradoxos matemáticos, topologia e atividades de construção de figuras geométricas através de dobraduras (origamis) e tangram.

Atividade 1: Alguns paradoxos matemáticos.

Nesta atividade trataremos uma série de paradoxos geométricos interessantes. Todos estes paradoxos envolvem figuras que são cortadas e rearranjadas e no momento em que isto acontece parte dessas figuras são perdidas, e quando elas retornam a sua posição original, novamente é recuperada a estrutura anterior.

Há vários exemplos de tais fenômenos, os quais, a um primeiro olhar, parecem serem paradoxos matemáticos, mas muitas vezes podem ser explicados através de uma análise mais criteriosa do fenômeno.

O paradoxo da linha que se anula.

Neste caso, nós consideramos um retângulo com 10 linhas verticais de comprimento igual.

Para desenhar as linhas você traça uma linha pontilhada ligando as duas diagonais do retângulo conforme a figura e traça as retas com a primeira reta tocando a parte baixa da diagonal à esquerda, e a décima reta tocando a parte alta da diagonal à direita, veja Figura 1.a abaixo.

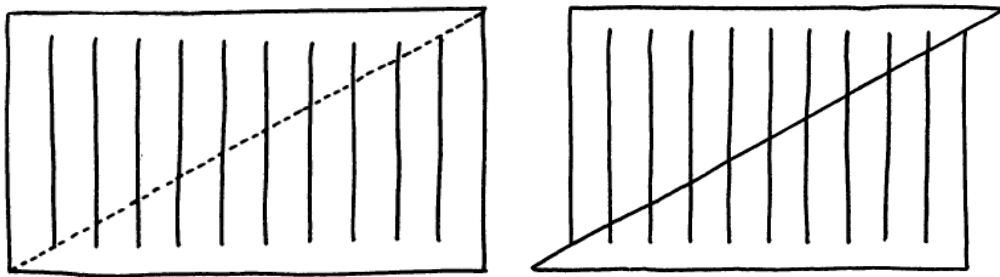


Figura 1: a)- Desenho das retas; b)- Deslocamento dos triângulos; Fonte: Referência [1].

É feito um corte na direção da reta diagonal, formando dois triângulos simétricos.

As figuras então são deslocadas de uma reta. A parte direita vindo para a esquerda e a parte esquerda vindo para a direita, conforme Figura 1.b

Após isso uma das retas, de modo surpreendente, some! O que aconteceu?

Cadê o quadradinho que estava aqui?

Este é um outro paradoxo interessante, feito utilizando-se um papel quadriculado, na forma de um tabuleiro de xadrez.

Um tabuleiro de xadrez tem, exatos, 64 quadradinhos, Figura 2.a. Vamos imaginar que cada quadradinho tem área 1, portanto o quadrado original tem área 64.

O papel é cortado ao longo da diagonal ligando quadradinho que está na oitava linha e o segunda coluna, com o quadradinho localizado na primeira linha e oitava coluna, Figura 2.a.

As figuras são ligeiramente deslocadas: a figura a direita é deslocada para a esquerda, a figura esquerda é deslocada para a direita, conforme a Figura 2.b.

Calcule a área novamente? A área agora não é 63? Por que isto aconteceu?

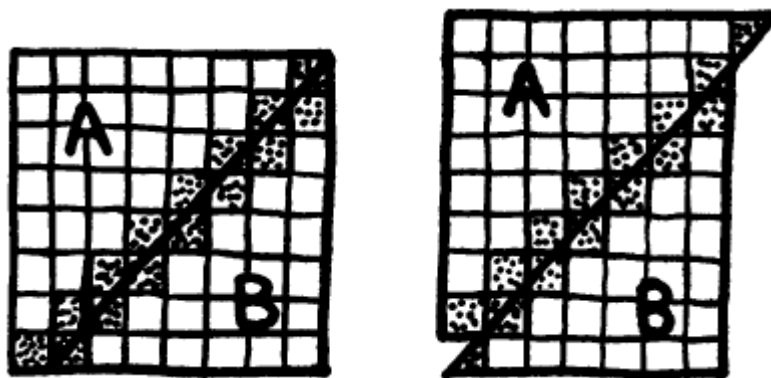


Figura 2: a)- Tabuleiro de xadrez seccionados; b)- Deslocamento das partes; Fonte: Referência [1].

De onde veio está área? Ou para onde foi esta área?

Um outro paradoxo interessante faz uso de dois retângulos de proporções iguais.

Inicialmente, numa folha de papel milimetrado, faça o desenho de um quadrado de 8×8 , dando uma área de 8 unidades.

Seccione o quadrado conforme a Figura 3.a., ou seja, desenhe 3 segmentos de retas ligando:

- O vértice superior esquerdo do quadradinho da primeira linha e primeira coluna ligando com o vértice inferior direito do quadradinho da terceira linha e oitava coluna;
- O vértice inferior esquerdo do quadradinho da terceira linha e primeira coluna ligando com o vértice inferior direito do quadradinho da terceira linha e oitava coluna;
- O vértice inferior esquerdo do quadradinho da terceira linha e quinta coluna ligando com o vértice superior direito do quadradinho da oitava linha e terceira coluna.

Na sequência, corte ao longo das linhas. Você obterá dois triângulos na parte de cima e dois trapézios.

Rearranje as figuras, conforme a Figura Conforme figura 3.b.

Calcule a nova área e veja. O que aconteceu? Por que a nova figura tem área 65?

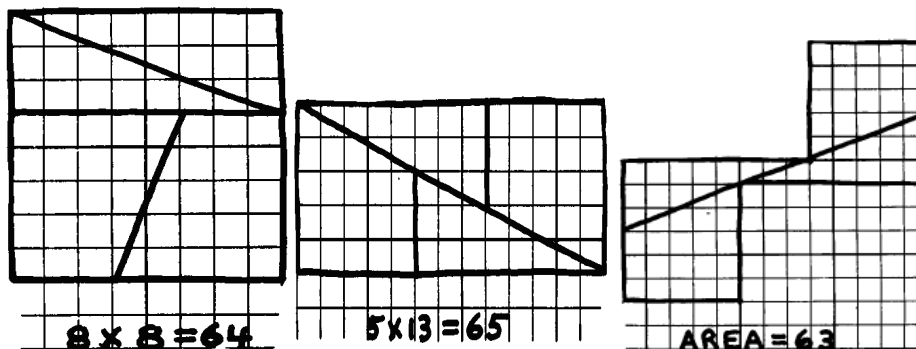


Figura 3: a)- Quadrado de 8×8 seccionado; b)- Rearranjo das partes para área 65. c)- Rearranjo das partes para área 63.; Fonte: Referência [1].

Para este mesmo problema, poderemos fazer um rearranjo diferente das figuras, de modo que a área nova seja de 63. Figura 3.c.

Por que isto acontece?

Apareceu um buraco no triângulo!

Para este exemplo, vamos construir um retângulo com dimensões 5 (de altura) e 13 (de largura).

Seccione o quadrado conforme a Figura 4.a., ou seja, desenhe os seis segmentos de retas ligando:

- O vértice inferior esquerdo do quadradinho da quinta linha e primeira coluna ligando com o vértice superior direito do quadradinho da primeira linha e décima terceira coluna;

- O vértice inferior esquerdo do quadradinho da terceira linha e oitava coluna ligando com o vértice inferior direito do quadradinho da terceira linha e décima terceira coluna;
- O vértice inferior direito do quadradinho da terceira linha e oitava coluna ligando com o vértice inferior esquerdo do quadradinho da quinta linha e oitava coluna.
- O vértice inferior direito do quadradinho da quarta linha e oitava coluna ligando com o vértice inferior esquerdo do quadradinho da quarta linha e décima primeira coluna.
- O vértice inferior esquerdo do quadradinho da quarta linha e décima primeira coluna ligando com o vértice superior esquerdo do quadradinho da quarta linha e décima primeira coluna.
- O vértice inferior direito do quadradinho da terceira linha e décima primeira coluna ligando com o vértice inferior direito do quadradinho da terceira linha e décima terceira coluna.

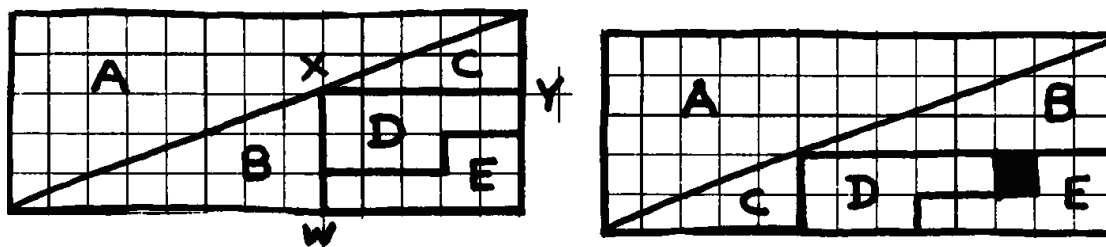


Figura 4: a)- Desenho das retas; b)- Rearranjando as figuras.; Fonte: Referência [1].

Irão ser formadas 5 figuras geométricas: 3 triângulos e duas figuras que se completam formando um quadrado. Reorganize essas figuras conforme a Figura 4.a. Você verá que formará um buraco.

Por que isso ocorre?

Cortando um quadrado em diferentes formas

Há inúmeras outras possibilidades. Nas figuras abaixo listamos mais algumas possibilidades de seccionar um quadrado e rearranjo cada uma das figuras geométricas formadas, figuras geométricas distintas contendo buracos no meio:

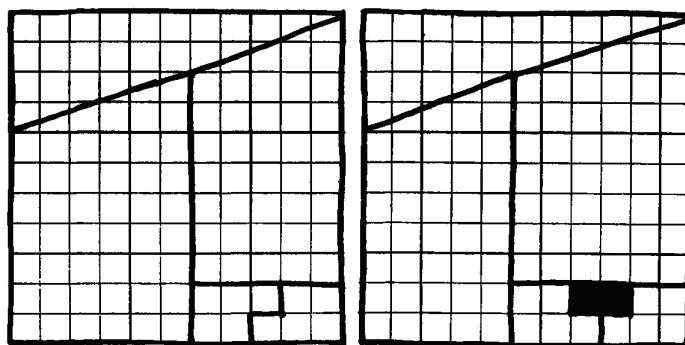


Figura 5: a)- Seccionando um quadrado 11x11 em 5 diferentes figuras; b)- Rearranjo das figuras; . Fonte: Referência [1].

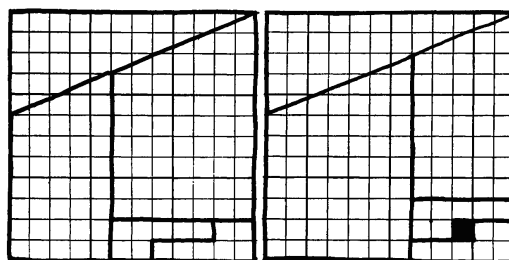


Figura 6: a)- Seccionando um quadrado 12x12 em 5 diferentes figuras; b)- Rearranjo das figuras;. Fonte: Referência [1].

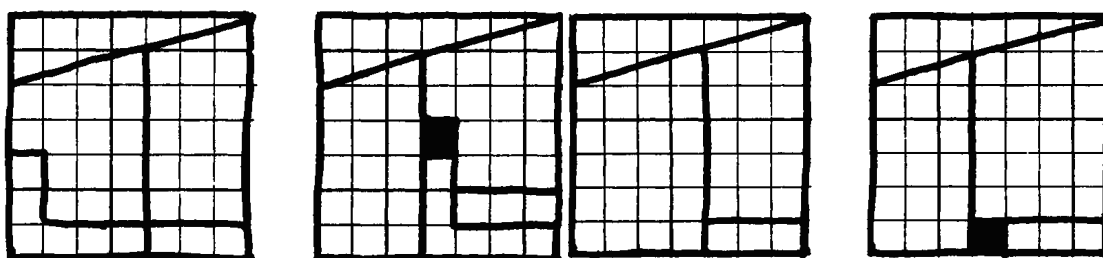


Figura 7: a)- Seccionando um quadrado 7x7 em 5 diferentes figuras; b)- Rearranjo das figuras; c)- Seccionando um quadrado 7x7 em 4 diferentes figuras; d)- Rearranjo das figuras. Fonte: Referência [1].

Por que isto acontece ?

Com o triângulo também pode...

Podemos também seccionar um triângulo de várias formas para, depois de rearranjarmos as figuras, obtermos paradoxos geométricos.

Seguem figuras de tais secções:

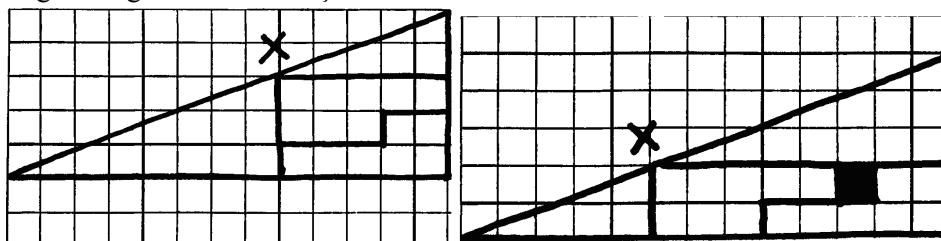


Figura 8: a)- Seccionando um triângulo retângulo em 4 diferentes figuras. Observe que a área do triângulo é $(13 \times 5)/2 = 32,5$ b)- Rearranjo das figuras; aparentemente o triângulo também tem 32,5 de área, mas tem um buraco no meio. Qual é o problema? Fonte: Referência [1].

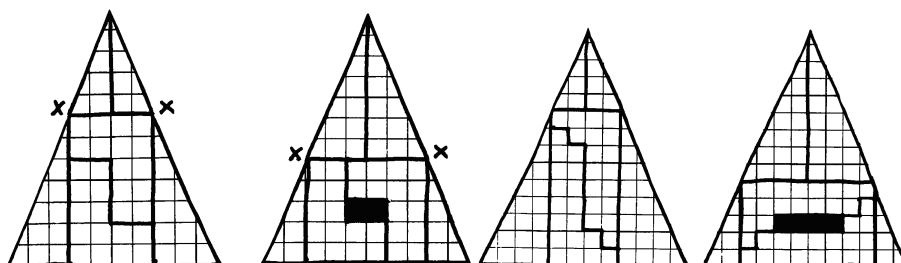


Figura 9: a)- Seccionando um triângulo em 6 diferentes figuras. b)- Rearranjo das figuras; ficou um buraco. Qual é o problema? c)- Seccionando o triângulo em 6 diferentes figuras; . d)- Rearranjo das figuras; ficou um buraco. Qual é o problema? Fonte: Referência [1].

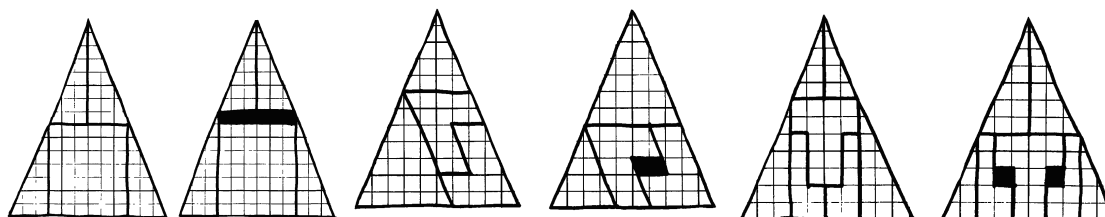


Figura 10: a)- seccionando um triângulo em 4 diferentes figuras. b)- Rearranjo das figuras; ficou um buraco. Qual é o problema? c)- Seccionando o triângulo em 4 diferentes figuras; . d)- Rearranjo das figuras; ficou um buraco. Qual é o problema? e)- Seccionando o triângulo em 7 diferentes figuras; . f)- Rearranjo das figuras; ficou um buraco. Qual é o problema? Fonte: Referência [1]

O cone que sobe.

Para fazer tal atividade você precisará apenas de cartolina, cola e um pouco de destreza.

Faça um figura em forma triangular tendo as seguintes medidas abaixo:

- a base do triangulo tendo 10 cm de comprimento e 7cm de altura. Os outros dois lados tendo 25cm, com 4cm de altura no vértice inferior. As laterais devem ser construídas como se fossem um paralelogramo.

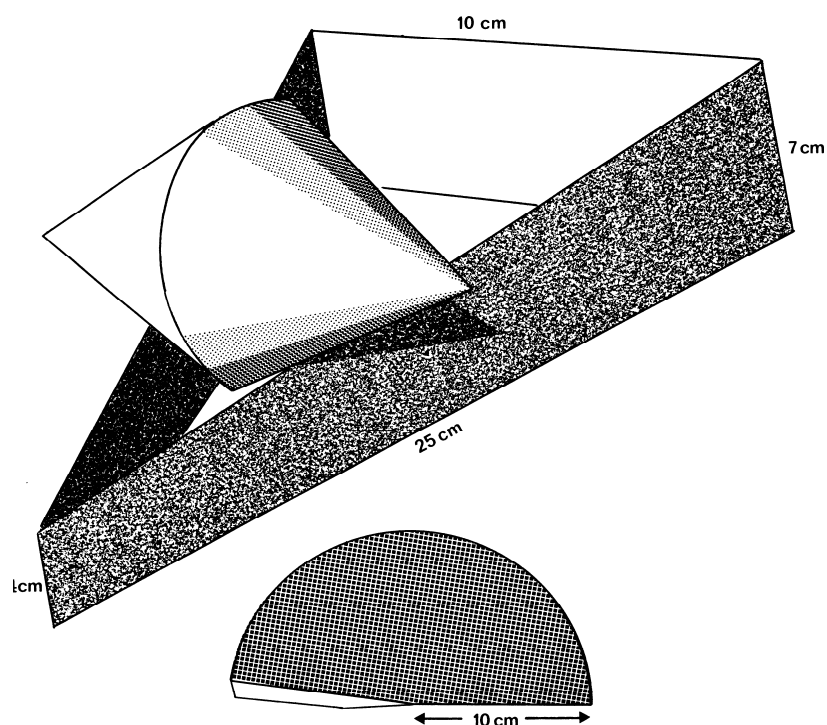


Figura 11:a)- O objeto subindo a ladeira, por que isso ocorre?. b)- esquema para se produzir o cone de papel. Fonte: Referência [4]

Construa também um objeto que irá “subir” a rampa, a qual se parece com a união de dois cones. Cada cone será construído a partir do setor circular acima, basta unir as laterais e teremos um cone. Depois basta colar os dois cones.

Após os dois aparatos feitos, basta colocar a o objeto que irá “subir” a rampa na parte mais baixa, se a rampa não estiver oleosa ou com algum impedimento, o objeto irá subir o cone.

Não parece surpreendente? Por que isto acontece?

Atividade 2: Atividades envolvendo curvas, barbantes e topologia.

Atividades interessantes e surpreendentes são aquelas que envolvem conceitos topológicos. Não importa aqui a definição formal dessa palavra, nem eu irei dá-la. Podemos dizer, que a topologia estuda as figuras geométricas e as similaridades entre elas. Dizemos que dois objetos são topologicamente equivalentes, se um pode ser deformado no outro.

Neste momento estamos interessado apenas em apresentar alguns exemplos curiosos que advém de atividades que envolvem conceitos topológicos, mas não vamos tentar explicá-los usando topologia, apenas intuição.

A faixa de Moebius

Está é uma estrutura muito famosa, mais ainda, extremamente interessante. Para entender tal estrutura, primeiro vamos considerar uma curva fechada simples.

Para fazer está curva vamos precisar de um pedaço de uma tira de papel na forma retangular de comprimento bem maior do que a largura.

Conecte as bordas da fita formando um anel. Figura 12:

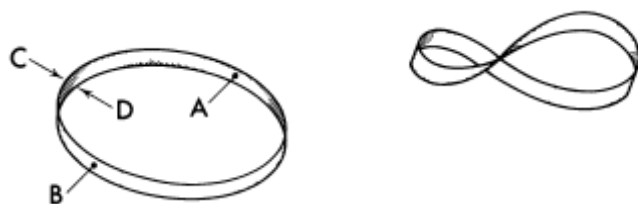


Figura 12:a) - Curva fechada contendo interior e exterior. b)- A faixa de Moebius. Fonte [5]

Observe que tal anel possui uma superfície externa e uma superfície interna. Mais do que isto, objeto possui em estabelecido o que representa o seu interior e o seu exterior. Se você começar a desenhar uma linha em **B**, após dar uma volta completa você estará novamente em **B**. Será impossível atingir o ponto **A** sem tirar o lápis do papel e colocar o lápis no interior do anel. Da mesma forma, se você começar com um desenho no interior do anel continuaremos sempre na parte de dentro do anel.

Também se cortarmos tal faixa ao meio na direção do seu comprimento iremos obter duas faixas distintas, sendo cada uma dela com o mesmo diâmetro, mas com a metade da largura.

A faixa de Moebius é uma estrutura que não possui um interior e um exterior bem definido:

Ela é obtida através de uma faixa de papel, veja Figuras 13.a,13.b e 13.c, dá-se um giro de 180° no papel e conecta as suas extremidades.

Se começarmos a fazer um desenho no exterior da faixa, se dermos uma volta completa estaremos no interior, se dermos mais uma volta estaremos no exterior novamente, Figura 13.d.

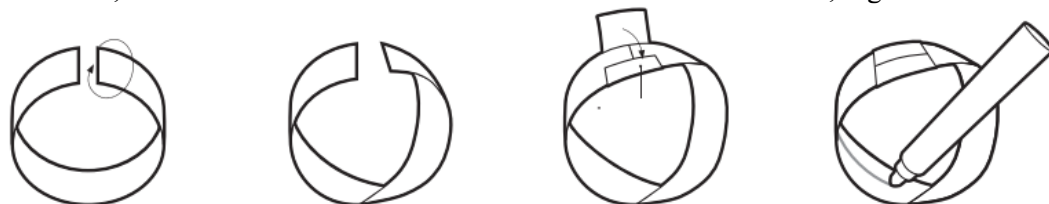


Figura 13:a) A faixa de papel. b) é feito um giro de 180° na faixa. c) a extremidade da faixa girada é conectada a outra. d) é feito um desenho ao longo do comprimento.

Uma atividade interessante é de tentar cortar uma faixa de Moebius no sentido do seu comprimento. Quando fazemos isso, é impossível separar a faixa em duas distintas. Se tentarmos fazer tal corte, iremos obter uma faixa de Moebius de largura menor que a faixa inicial e o dobro do comprimento, Figura 14.a.

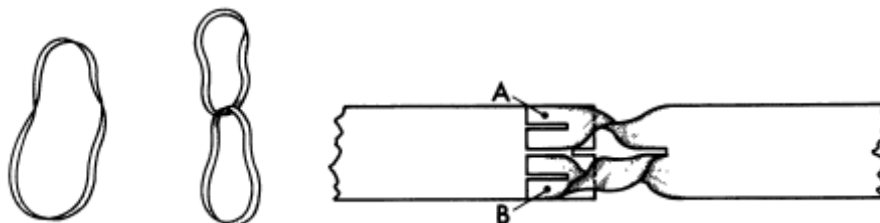


Figura 14: a) a faixa de Moebius após ter sido cortada. b)-Anéis resultado do corte da faixa, no sentido do comprimento, obtida após girarmos de 360° e conectado suas extremidades Fonte: Referência [5].

Se por outro lado, se construirmos uma curva fechada da mesma forma que de Moebius só que ao invés de darmos um giro de 180° , dermos um giro de 360° e cortamos no sentido do comprimento, obteremos dois anéis conectados, veja Figura 14.b.

Há diversas outras possibilidades para conectarmos a faixa. Na Figura 14.c, temos uma forma distinta de conexão. Nesta, conectamos a faixa de duas formas distintas. Dividimos uma das extremidades da faixa ao meio. Numa delas fazemos um giro de 180° e conectamos na extremidade (A), na outra fazemos um giro de 360° e conectamos na extremidade (B).

Podemos cortar a faixa ao longo do comprimento começando em (A) depois em (B), veja o que acontece!

Uma faixa toda enrolada.

Nesta atividade vamos utilizar um pouco da idéia de transferência de torção. Para isso faça um circuito fechado na forma de uma faixa. Uma boa alternativa seria uma faixa de elástico, por ser mais maleável, mas na falta dessa, uma faixa até mesmo de papel pode ser feita.

Segure a faixa conforme a Figura 15.a, e faça um giro duplo na faixa como indicado pela setinhas da Figura 15.a.

Peça para algum amigo seu segurar a faixa como indica a Figura 15.b. Desafio-o a remover o giro duplo da faixa, obviamente sem que ele tire os dedos da faixa. Ele tentará, mas será inútil.

Após tentativas frustradas do seu amigo, pegue novamente a faixa da forma original e tente remover giro, para isto basta seguir como na figura 15.c. Eleve a mão esquerda para cima e a mão direita mova para baixo. Moverá instantaneamente.

Por que isto acontece?

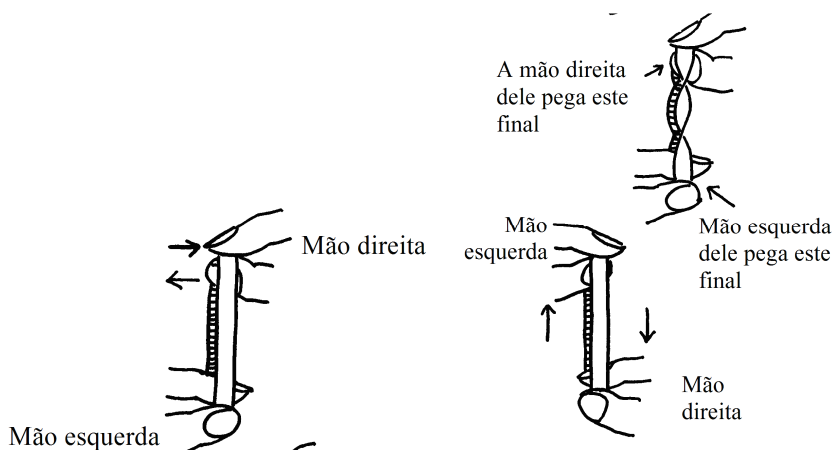


Figura 15: a) A faixa e o modo de segurá-la. b)(figura a direita acima) é feito uma torção na faixa c)(figura a direita abaixo) mova as mãos, passando a mão direita para baixo e a mão esquerda para cima. Fonte: Referência [1].

Os cliques que se unem

Nesta atividade iremos mostrar, através da transferência de curvas, a união de dois cliques.

Um mágico americano, chamado Bill Bowman, descobriu tal fenômeno. Para apresentar o seu número ele conta uma história.

Para fazê-la, serão necessários 2 cliques e uma cédula de dinheiro. Ele segue contando a seguinte história de Romeu e Julieta:

“As famílias do garoto (mostrando um dos cliques) e da garota (mostrando o outro clipe) queriam manter este jovem casal distante um do outro. Eles viviam próximos um do outro, suas casas eram separadas por um muro (mostrando a cédula de dinheiro)”

Um lado da cédula é dobrado e um dos cliques é colocado na posição, conforme a Figura 16.a.

O mágico continua a história: “A garota está trancada em seu quarto, que isto irá representar”. E ele continua: “O garoto também está trancado em seu quarto, o qual está no outro lado do muro”. Após este comentário o mágico coloca, cuidadosamente, o clipe na nota conforme a figura 16.b.



Figura 16: a) Colocando o primeiro clipe na cédula. b) colocando o segundo clipe na cédula. Fonte: Referência [5].

Finalmente o mágico diz: “Mas não há nada mais forte do que o amor”, e cuidadosamente, puxa a nota fazendo com que os cliques se unam.

Este é um truque bem interessante. Por que isto acontece?

Trabalhando com nós

Existem vários truques com nós. Este tipo de estrutura é bem interessante do ponto de vista matemático.

Atividade com nó 1: Como criar o nó? Para fazer tal atividade você apenas precisará de um barbante.

Mostre para as “suas vítimas” um nó simples. Aquele nó que você faz no primeiro momento em que vai fazer um laço de um sapato, conforme Figura 17.a.

Desfaça o nó e peça para a sua vítima segurar, de qualquer forma que ela quiser, nas duas pontas do barbante e tentar fazer o nó, mas com um detalhe, ele não pode em nenhum momento soltar as duas pontas.

Está é uma atividade é bem interessante. É impossível, numa curva fechada fazer uma auto-intersecção e sair.

Uma possibilidade é transferir um nó já existente. Para isto basta segurar o barbante como as mãos dispostas na Figura 17.b. Note que você tem um nó nas suas mãos, o que você está fazendo é transferindo um nó já existente para a curva.

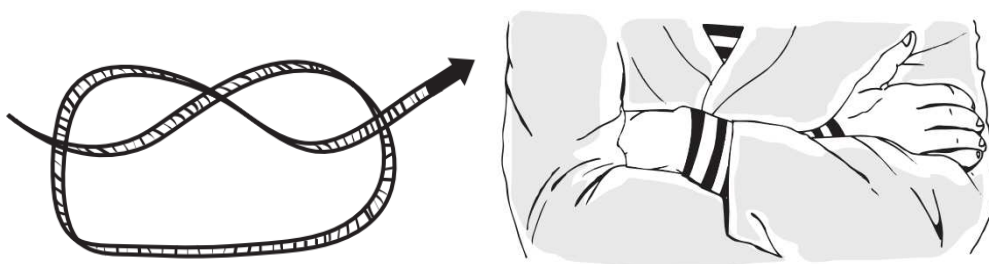


Figura 17: a) Um nó. b) como você deve pegar as pontas do barbante para conseguir fazer o que se pede.

Atividade com nó 2: Como sair? Para fazer esta atividade você precisará apenas de um barbante.

Corte dois barbantes de mais ou menos 2 metros de comprimento. Faça uma “algema” em cada uma das pontas de tal modo que ela fique folgada para se colocar a mão (de qualquer tamanho).

Então convide duas pessoas para participar da atividade. Peça que eles coloquem as algemas em uma das mãos e que entrelacem uma corda na outra e coloquem a algema na outra mão, Conforme a Figura 18.

O desafio é que eles consigam desgrudar-se um do outro.

Para fazer isto você deve notar que o seu corpo e a corda não formam, verdadeiramente, um circuito fechado.

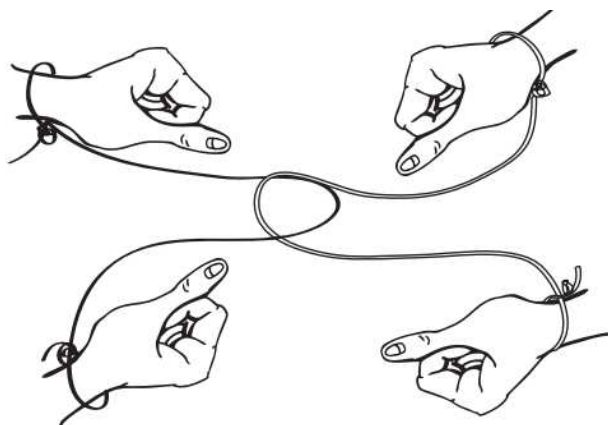


Figura 18: Como devem ficar a união das duas pessoas. O que fazer para sair?

Para se desgrudar, basta fazer um loop com a corda do outro companheiro e passar por baixo de uma das “algemas” e depois passando novamente por cima da mão.

Por que isto funciona?

Atividade com nó 3: Parece que é um nó. Esta atividade é bem simples e rápida de ser feita. Você vai precisar de um barbante.

Basta seguir a sequência descrita na figura 19.

Inicialmente, você pendure um fio de acordo com a primeira ilustração da Figura 19 e siga a sequência de de passos para fazer-se os nós. No segundo passo, cruze as extremidades; no passo 3, inverta as extremidade; no passo 4 peça que alguém coloque o dedo sobre o seu; no passo 5, cruze novamente as extremidades; no passo 6 inverta novamente o sentido dos nós, mantendo os dedos ainda unidos; no passo 7, coloque as duas extremidades acima.

Peça que alguém segure o seu dedo e peça que a outra pessoa retire o dedo colocado. Imediatamente você peça que a pessoa puxe o barbante.

O barbante sairá livremente. Por que isto acontece?

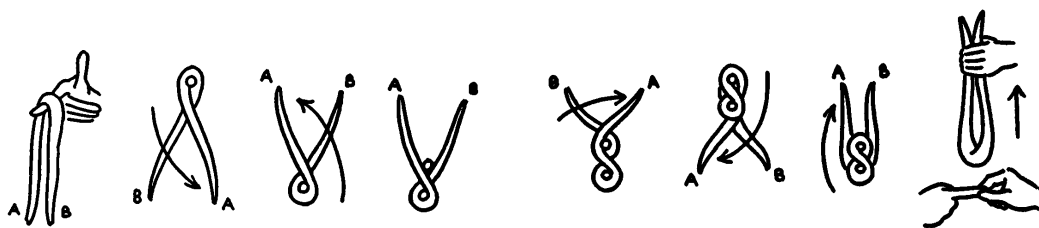


Figura 19: Sequências a serem seguidas para se fazer o truque. Fonte: Referência [1].

Atividade com nó 4: Cortando o canudo. Para esta atividade você precisará de um lápis, barbantes e um canudo.

Na base de um lápis, utilizando-se um barbante, amarre um canudo, conforme Figura 20.a. Para facilitar a sua vida, em uma das pontas faça um nó. Isso será importante, pois em todas as vezes que forem feitos os nós, este lado do barbante com o nó na ponta deve ficar sobre a outra ponta, se isso não acontecer o truque não irá funcionar.

Em seguida, passe um barbante em torno do lápis levando o barbante para a parte de trás do lápis, conforme Figuras 20.b. e 20.c. Em seguida, retorne para a parte da frente novamente deixando as extremidades livres, Figura 20.d.

Neste momento, amarre o barbante na parte de cima do lápis utilizando-se um barbante, Figura 20.e.

Passe o barbante na frente do canudo, Figura 20.f. Vá com o barbante até a parte de trás do lápis e retorne novamente para a parte da frente, Figuras 20.g e 20.h.

Você deu inúmeras voltas no lápis e no canudo, neste momento parecerá que o canudo e, principalmente, o lápis estão bem amarrados ao canudo.

Puxe o barbante com força. Neste momento o canudo é cortado no meio e o barbante se desligará do lápis, Figura 20.i.

Por que isto acontece? Siga cuidadosamente os nós para você ver que os nós foram feitos inicialmente e depois foram desfeitos após ser colocado o canudo.

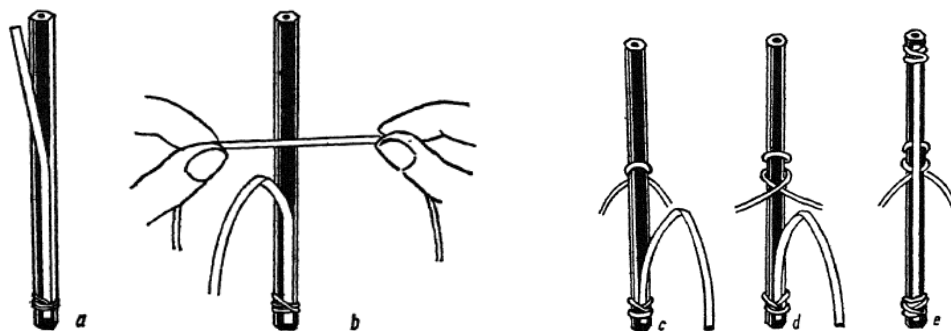


Figura 20: Sequências a serem seguidas para se fazer o truque para se cortar o canudo. Fonte: Referência [2].

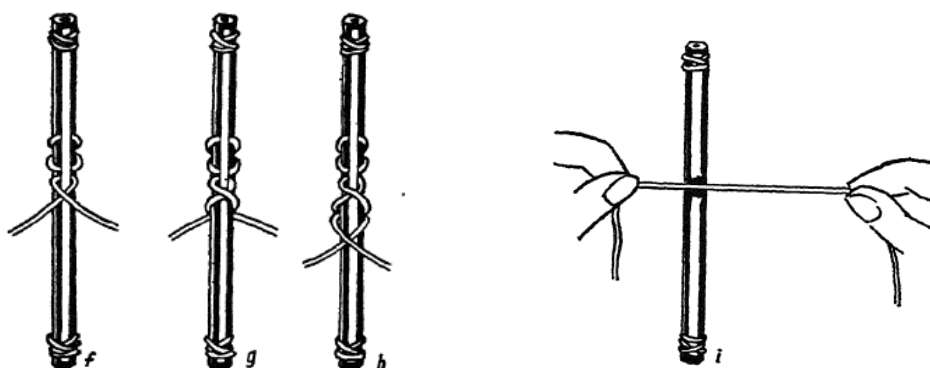


Figura Continuação da 20: Sequências a serem seguidas para se fazer o truque para se cortar o canudo.

Está dentro da curva ou fora dela?

Para a realização dessa atividade, será necessário um barbante de uns 10 metros ou mais.

Primeiramente, una as pontas desse barbante, formando uma curva fechada.

Peça a alguém que coloque o barbante sobre uma mesa em qualquer forma complexa que a pessoa quiser, mas deixe claro que ela não deve formar auto-intersecções da curva, ou seja, não deixar que uma parte do barbante cruze com outra parte, formando assim uma figura geométrica bem esquisita, Figura 21.a.

Jornais são colocados em volta da figura de modo que a fronteira fique escondida e apenas uma região retangular em torno do centro da figura seja visível, como a Figura 21.b.

Pede-se que para um espectador colocar o seu dedo em qualquer posição dessa figura. A pergunta é: “se for removido em um dos lados o jornal e a linha puxada, o dedo do espectador será ou não capturado?”

A complexidade da estrutura sobre a mesa, juntamente com os jornais cobrindo as fronteiras, faz com que seja, praticamente, impossível de se saber se isso irá acontecer, entretanto, com uma certa habilidade você será capaz de descobrir se o dedo será ou não capturado.

Para descobrir isto basta fixar os olhos em um ponto da estrutura antes da estrutura ser coberta pelo jornal e identificar se tal ponto faz parte do interior ou do exterior da estrutura. A partir deste ponto é possível identificar o que acontece com todos os outros, para isto basta seguir a seguinte idéia:

- Se dois pontos estão do mesmo lado da figura (ou dentro ou fora) então se você ligar esses dois pontos por uma reta imaginária, ela cruzará a curva em um número par de pontos.
- Se dois pontos estão do lado contrário de uma figura (ou seja, um dentro e outro fora), se você ligar esses pontos por uma reta imaginária, ela cruzará a curva em um número ímpar de pontos.

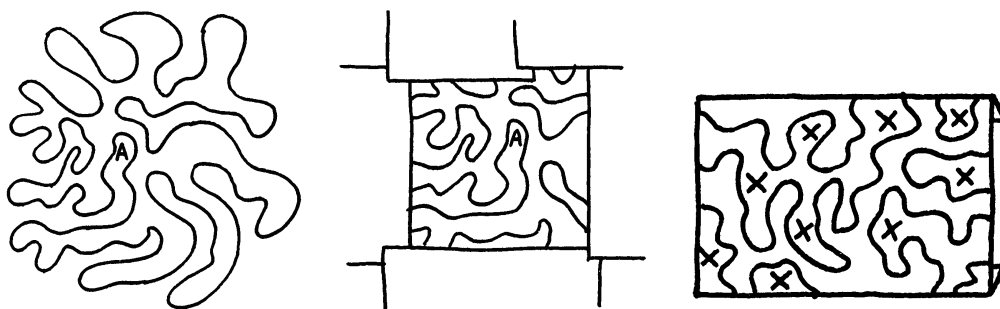


Figura 21: a)- Barbante colocado numa mesa formando uma figura esquisita. Observe que tal figura possui, bem definida a parte interna e a parte externa. b)- São colocados jornais em torno da figura a fim de suas fronteiras fiquem completamente escondidas. Fonte: Referência [1].

Por que isto funciona? Faça o desenho no papel e algumas tentativas, não será difícil identificar tal idéia.

O elástico que pula.

Este truque é bem simples. Ele utiliza a idéia da transferência de curva, para fazê-lo você vai precisar de um elástico, desses elásticos que são utilizados para unir cédulas.

Para fazer, coloque um elástico ao redor do seu dedo indicador, conforme Figura 22.a; com cuidado, pegue a parte inferior do elástico que ficou pendurada e passe por trás do seu dedo médio, Figura 22.b; novamente, retorne até o dedo indicador e coloque o elástico, Figura 22.c.

Neste momento, você peça para alguém segurar o seu dedo indicador e levante o dedo médio. Como num passe de mágica o elástico passará todo para o seu dedo indicador.

Por que isto acontece? Tente fazer com calma tal truque. Inicialmente, parece bem curioso por que tal truque acontece, mas funciona se for feito com cuidado.

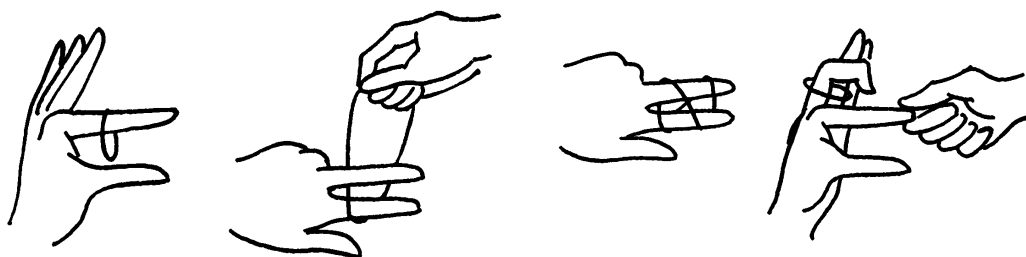


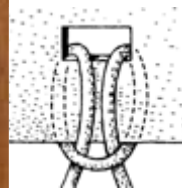
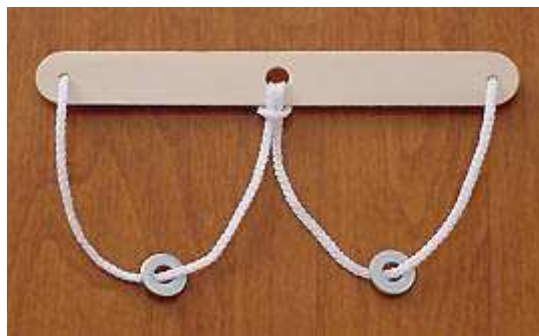
Figura 22: a) coloca-se um elástico ao redor do dedo indicador; b) passa-se o elástico por trás do dedo médio; c) retorna-se novamente até o dedo indicador; d) peça para alguém segurar o seu dedo indicador e lentamente mova o dedo médio, o elástico passará todo ao dedo médio. Mágica? Fonte: Referência [5].

Corda e o quebra cabeça do anel.

Este quebra cabeça antigo é muito fácil de fazer e utiliza materiais baratos. A versão mais simples pode ser feita com palito de sorvete (o que pode também ser feito

com qualquer outro material, a única coisa é que cada um dos três buracos feito no objeto deve ser menor que cada uma das argolinhas.

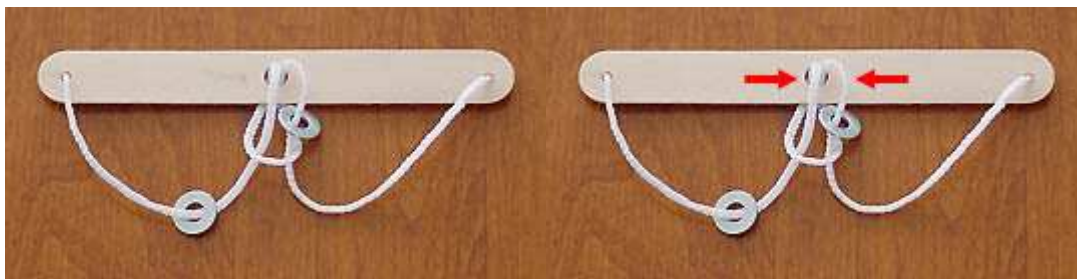
O objetivo desse quebra cabeça é mover um anel para o outro lado sem que a linha seja cortada.



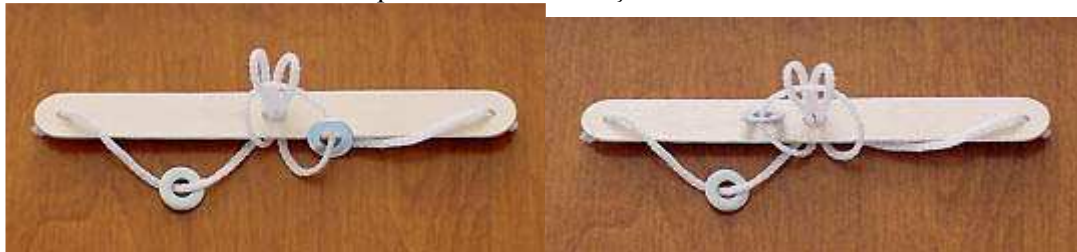
Detalhe

Solução:

Vamos mover o anel suspenso da parte direita para a parte esquerda. Puxe o centro do laço para baixo e deslize o anel direito até dentro da área central.

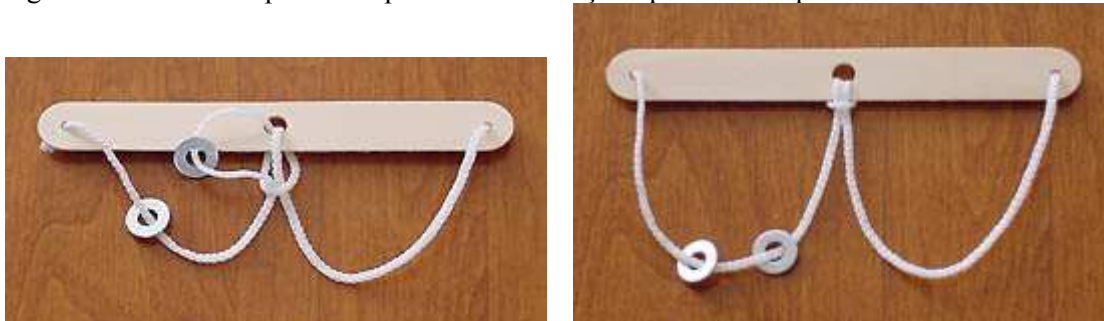


Puxe as duas cordinhas indicadas pela seta na sua direção



.. até um laço duplo aparecer do centro Mova o anel para a mesma posição do outro lado passando pelo interior do laço duplo

Agora reverta os dois primeiros passos. Puxe o laço duplo de volta para o centro do buraco..



então deslize o anel por baixo do laço central até laço da esquerda

Atividade 3: Dissecção do plano: Quebras cabeças imaginativos.

Tangrams

Está é uma forma bem interessante de se montar certos objetos ou figuras planas. Elas são baseadas em apenas 7 diferentes figuras geométricas:

- 5 triângulos de tamanhos distintos;
- Um quadrado;
- E um paralelogramo qualquer;

Tais figuras são obtidas a partir da dissecção de um quadrado conforme a Figura 23.a.

Para fazer a dissecção do quadrado, basta desenhar no quadrado um quadriculado tendo 16 quadradinhos menores, conforme Figura 23.a.

Traça-se então 5 retas distintas:

- O vértice inferior esquerdo do quadradinho da quarta linha e primeira coluna ligando com o vértice superior direito do quadradinho da primeira linha e quarta coluna;
- O vértice inferior esquerdo do quadradinho da segunda linha e primeira coluna ligando com o vértice superior direito do quadradinho da primeira linha e segunda coluna;
- O vértice superior esquerdo do quadradinho da primeira linha e terceira coluna ligando com o vértice inferior direito do quadradinho da primeira linha e terceira coluna.
- O vértice superior esquerdo do quadradinho da segunda linha e segunda coluna ligando com o vértice inferior direito do quadradinho da quarta linha e quarta coluna.
- O vértice inferior esquerdo do quadradinho da quarta linha e décima primeira coluna ligando com o vértice superior esquerdo do quadradinho da quarta linha e décima primeira coluna.

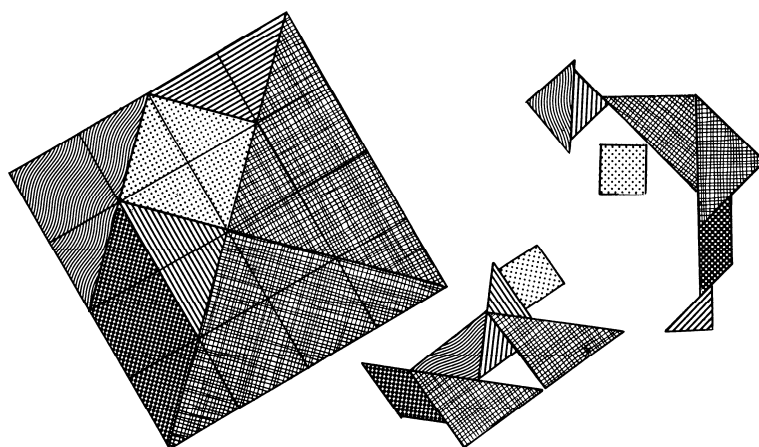


Figura 23. a) Dissecção do quadrado em 7 figuras geométricas; b) Objetos geométricos que podem ser construídos a partir desses das 7 figuras básicas. Fonte: Referência [4].



Figura 24. Alguns exemplos de figuras que podem ser construídas utilizando apenas as 7 figuras básicas

Pentaminos

Existe outras formas de dissecção do quadrado, esta forma é muito mais complexa, mas muito interessante. Para fazer você dividirá um quadrado em 64 quadradinhos menores, conforme a Figura 25, abaixo.

Basta seguir os passos de dissecção abaixo, são bem mais complexos do que os do Tangram. Neste caso divide-se o quadrado em 13 figuras planas distintas. Pode-se fazer figuras geométricas interessantes com as mesmas. Tais figuras planas parecem-se muito com um jogo de computador muito comum, chamado Tetris.

Tente fazer a dissecção utilizando E.V.A, e imagine figuras geométricas bem legais que podem ser construídas.

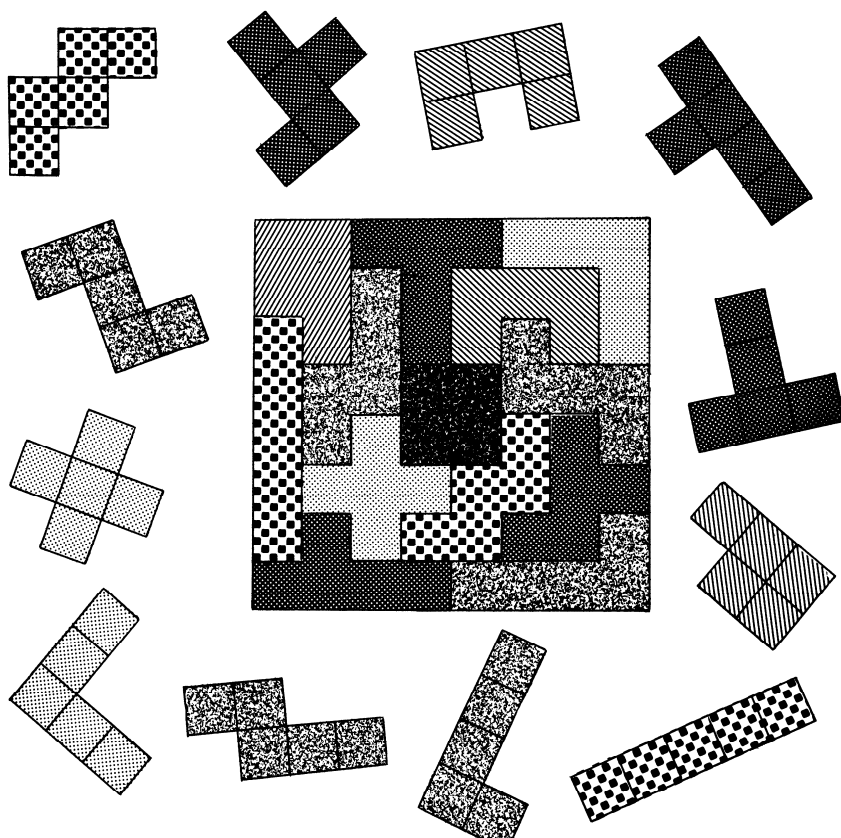


Figura 25. A secção do quadrado 8x8 em 64 quadradinhos unitários. A partir desses quadradinhos é possível fazer 13 figuras. Observe que tais figuras parecem-se muito com aquelas de um famoso jogo eletrônico chamado Tetris. Fonte: Referência [4].

Atividade 4: Dobraduras de papel para sólidos geométricos

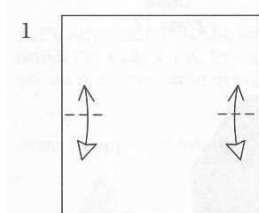
Essa é uma técnica muito utilizada pelos orientais, principalmente, japoneses para se fazer figuras e objetos através, simplesmente, da dobradura de papel. Tal técnica é chamada de origami.

Existem muitas possíveis formas geométricas que podem ser obtidas através dos origamis, aqui iremos nos concentrar em alguns sólidos geométricos. Primeiro falaremos de alguns sólidos, ditos sólidos de Platão: tetraedro, cubo, octaedro. Depois faremos uma dobradura para um prisma. Existem vários outros sólidos geométricos que podem ser obtidos através de dobraduras, veja o belo livro [3], do qual eu tirei as figuras para ilustrar as técnicas.

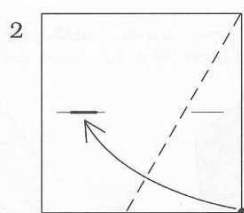
Tetraedro.

Para fazer um tetraedro de papel utilizando apenas dobraduras é muito fácil. Inicialmente, pegue qualquer papel em forma quadrada e siga os passos abaixo. Fique atento em analisar quais tipos de figuras você está formando.

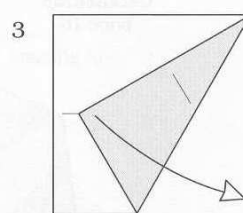
O tetraedro é formado por 4 triângulos equiláteros. Ele é considerado um sólido de Platão, e é o mais simples desses sólidos. Platão acreditava que o tetraedro representava o fogo por causa de sua agudez e simplicidade.



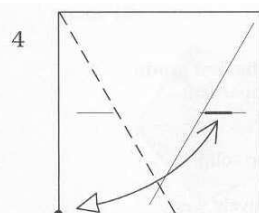
Dobre e Desdobre



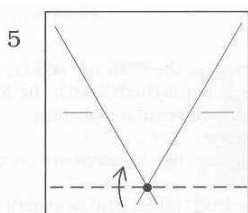
Traga a quina direita mais baixa ao centro da linha



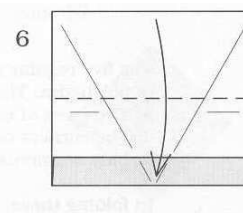
Desdobre



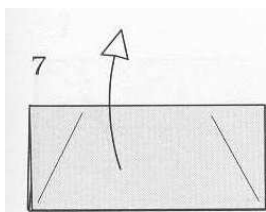
Desdobre



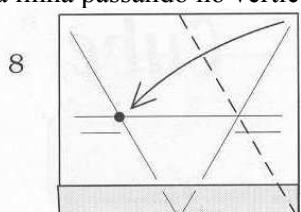
Dobre a parte baixa sobre a linha passando no vértice



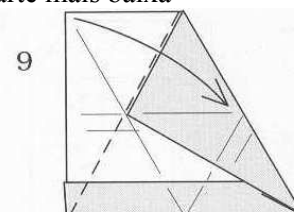
Dobre o topo sobre a parte mais baixa



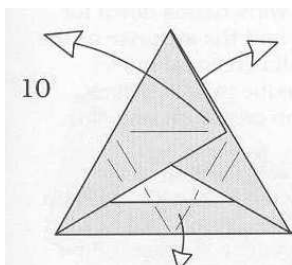
Desdobre



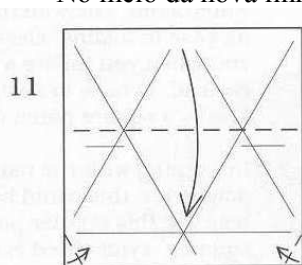
Leve a quina direita mais alta No meio da nova linha



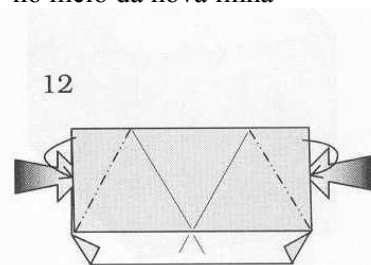
Leve a quina esquerda no meio da nova linha



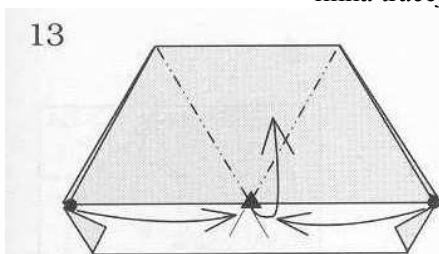
Dobre e desdobre



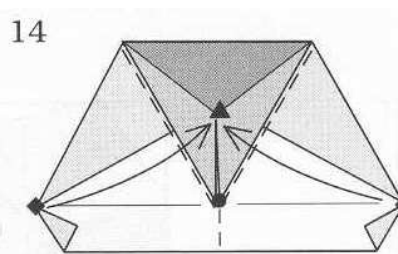
Leve o topo do papel no vértice do triângulo (dobre ao longo da linha tracejada)



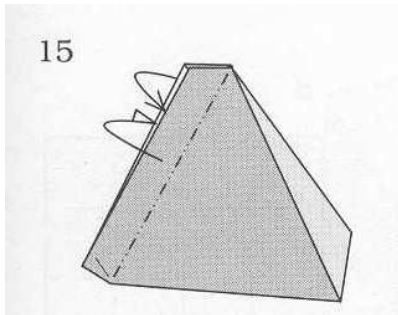
Reverta a dobra colocando para dentro as laterais.



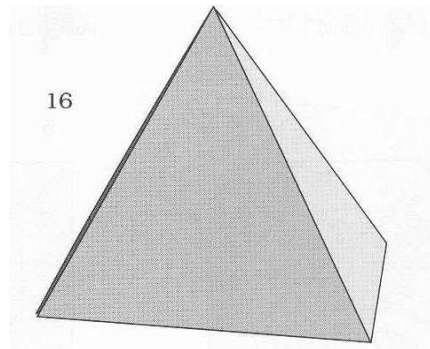
Puxe no ponto ▲ enquanto os pontos se encontram. O modelo irá ficar tridimensional



Os pontos ♦ irão encontrar ▲ no topo.



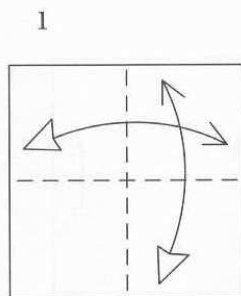
Coloque as laterais para dentro em ambos os lados.



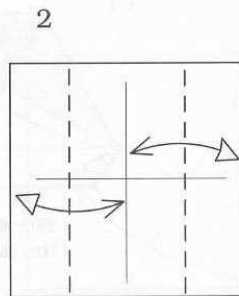
Você tem um tetraedro.

Cubo

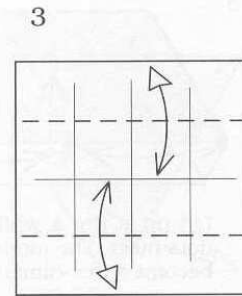
Um cubo é um sólido que possui 6 faces, todas formadas por quadrados. Este também é um sólido de Platão, o qual considerava representando a Terra devido a sua estabilidade. Utilize um papel quadrado para as dobraduras.



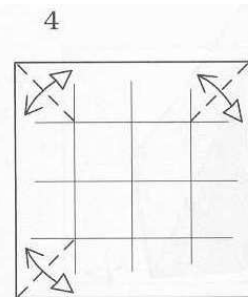
Dobre e desdobre.



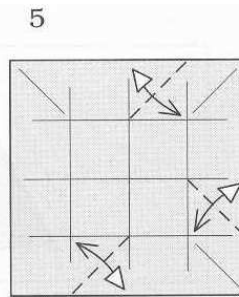
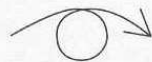
Dobre e desdobre



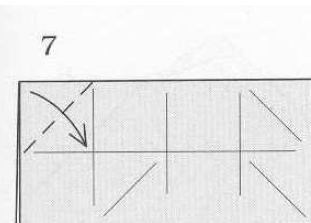
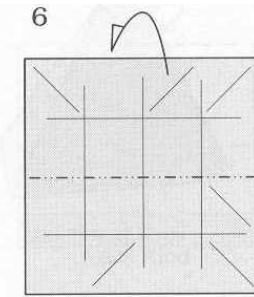
Dobre e desdobre



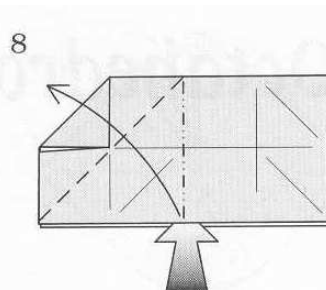
Dobre e desdobre indicada



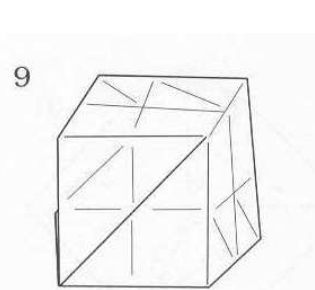
Vire o papel para o outro lado e dobre e desdobre na direção indicada



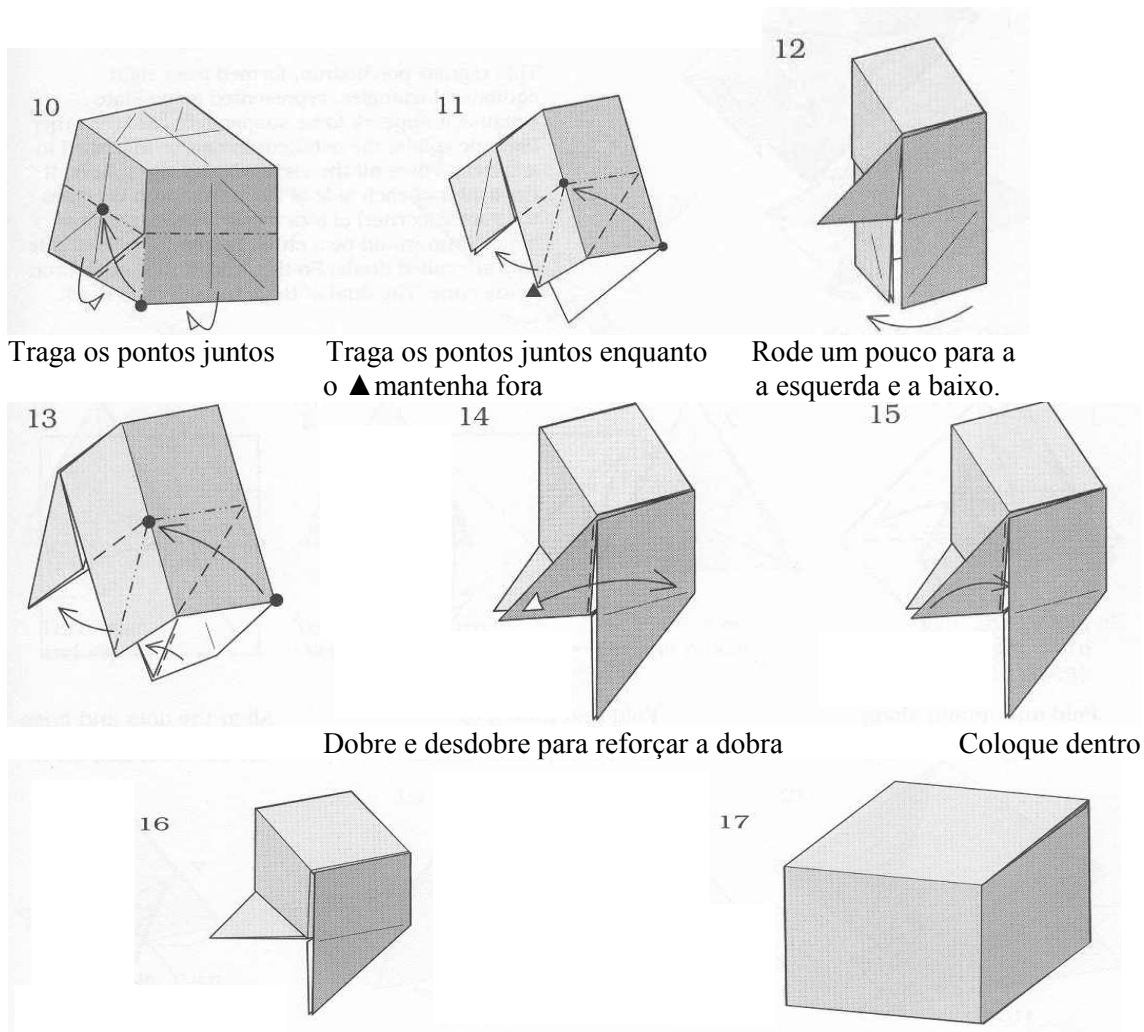
Dobre a ponta direita do Quadrado



Abra no meio para ver o interior



Esta vista do interior deste modelo tridimensional. Rode Para ver fora, o lado com diversos lado está à esquerda.



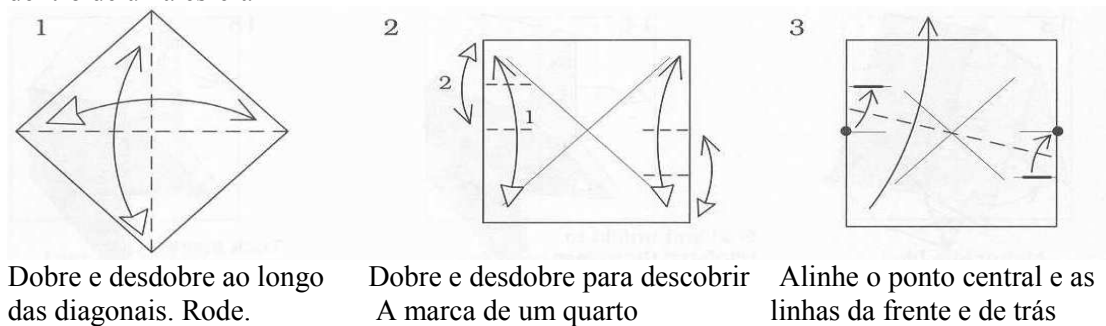
Repita os passos 14-15 para colocar os outros dois lados

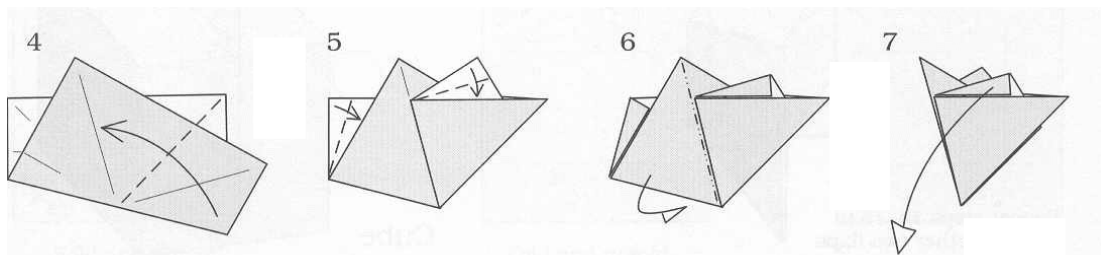
Cubo

Octaedro:

Para este modelo, todas as dobraduras são bidimensionais, até o último passo no qual a figura é inflada.

Este poliedro regular, formado a partir de 8 triângulos eqüiláteros, representa o ar para Platão, pois ele parece estar suspenso. Além disso os sólidos de Platão podem ser inseridos dentro de uma esfera



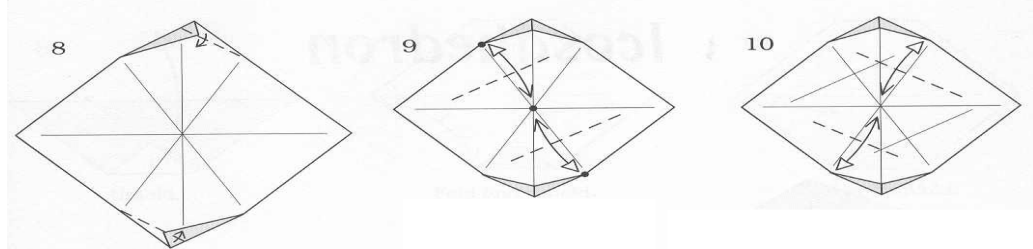


Dobre e desdobre

Dobre e desdobre

Dobre e Desdobre

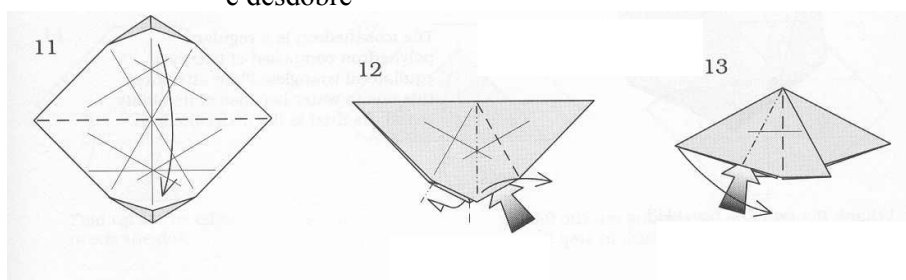
Abra a figura.



Dobre as pontas

Dobre os pontos para o centro e desdobre

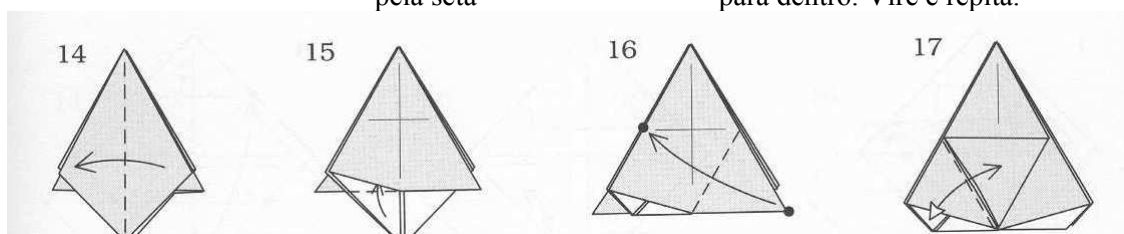
Dobre e Desdobre



Coloque as pontas juntas

Levante no ponto indicado pela seta

Coloque cada um das laterais para dentro. Vire e repita.

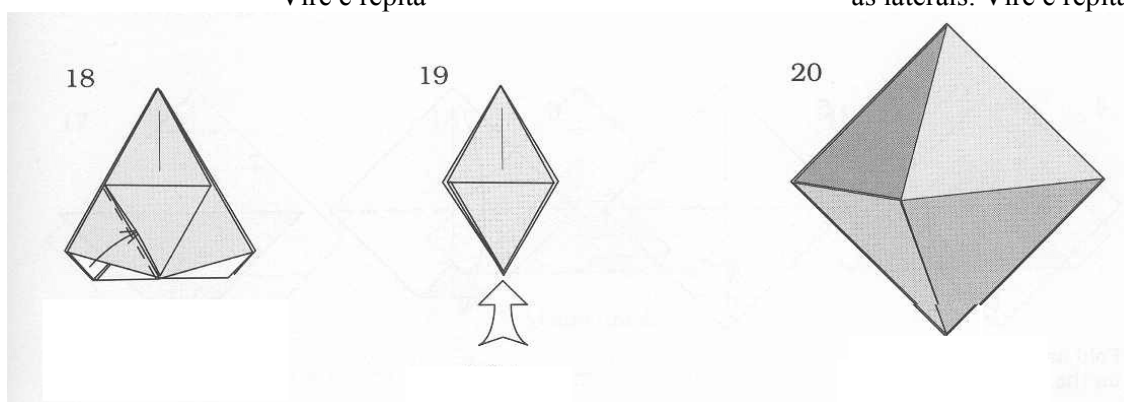


Vire e repita

Dobre para dentro
Vire e repita

Vire e repita

Dobre e desdobre todas as laterais. Vire e repita.



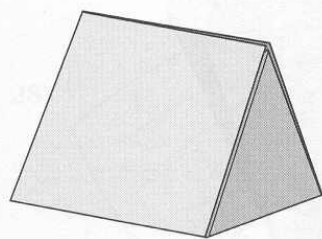
Dobre para dentro vire e repita

Infle (assopre)

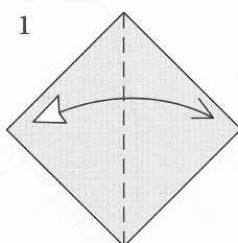
Octaedro.

Prisma triangular:

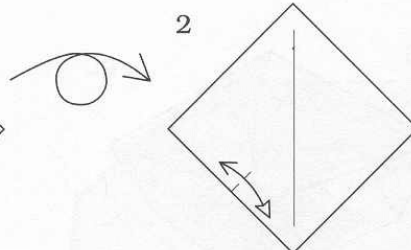
Prisma tem lados retangulares conectando um par de polígonos idênticos.



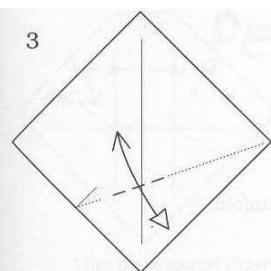
Prisma



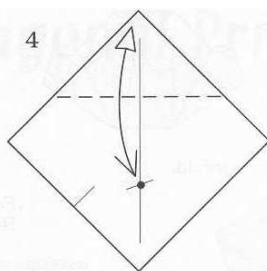
Dobre e desdobre



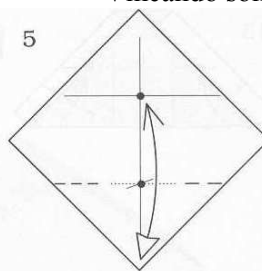
Dobre na metade e desdobre
Vincando somente o lado



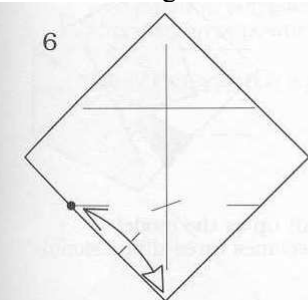
Dobre e desdobre vincando
Somente a diagonal



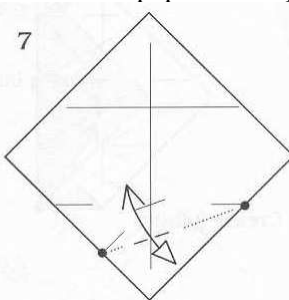
Dobre e desdobre
isto divide o papel em terços



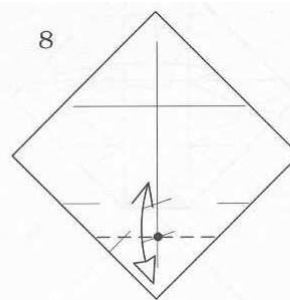
Dobre e desdobre vincando
somente os finais.



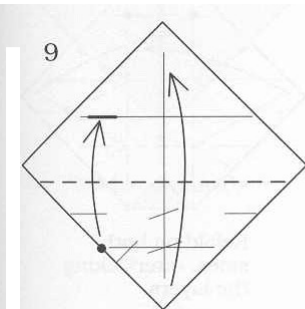
Dobre na metade e desdobre
Vincando somente o lado



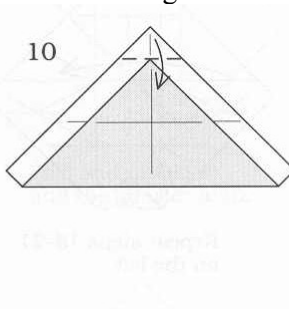
Dobre e desdobre vincando
somente a diagonal



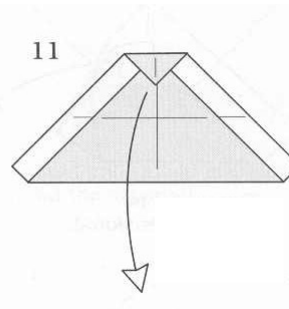
Dobre e Desdobre



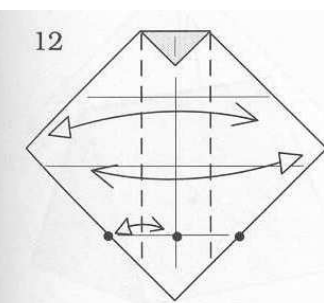
Dobre no sentido da seta



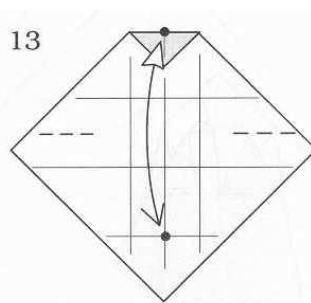
Dobre no sentido da seta



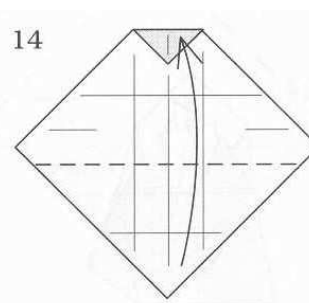
Desdobre



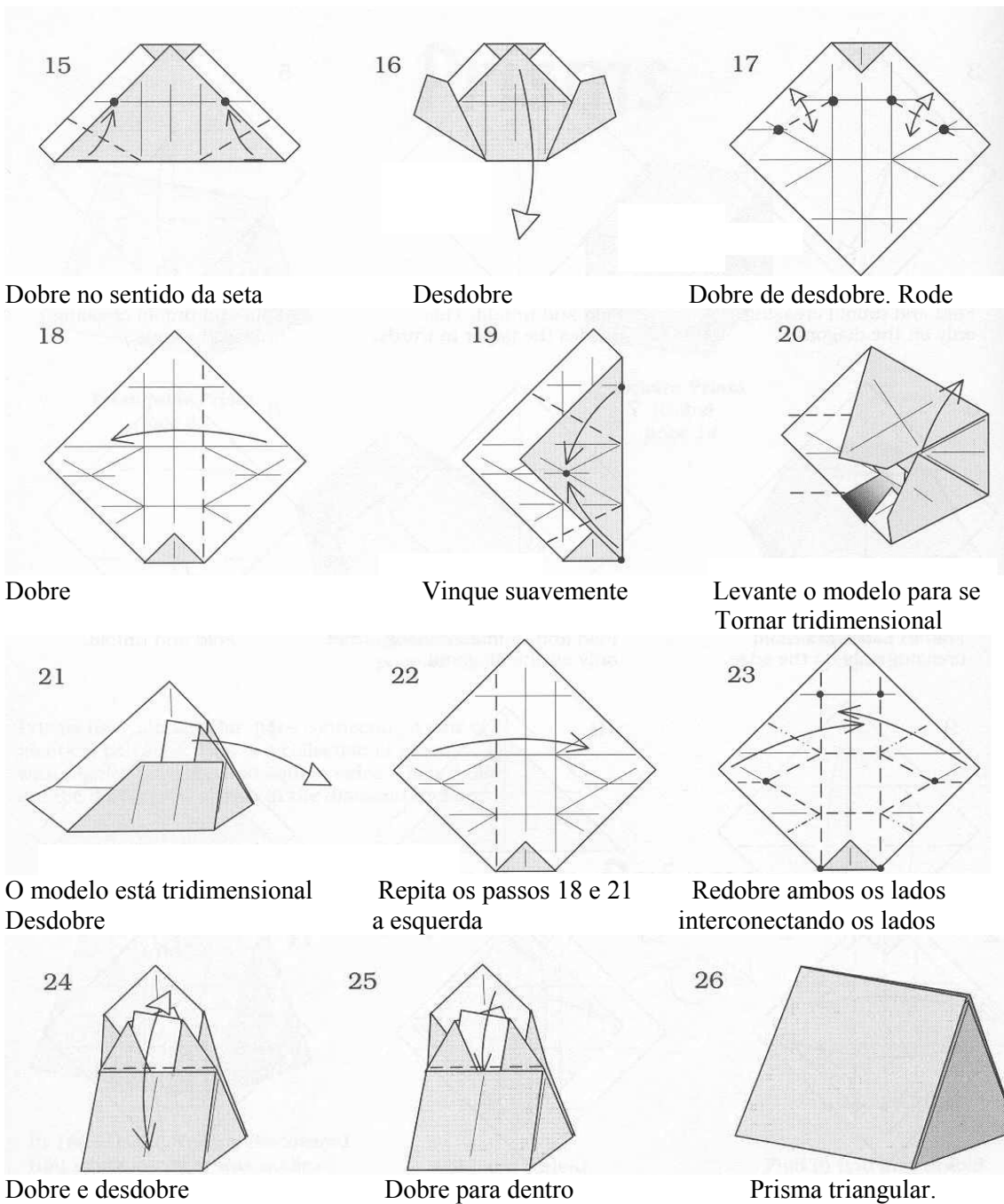
Dobre e desdobre



Dobre e desdobre vincando somente o final



Dobre



Referências:

- [1] Gardner, Martin, *Mathematics, Magic and Mystery*, Dover Publications, 1956.
- [2] Lukács, C. and Tarján, E., *Mathematical Games*, Walker and Company, NY, 1968.
- [3] Montroll, John, *A Plethora of Polyhedra in Origami*, Dover Publications, NY, 2002.
- [4] Rice, T. *Mathematical Games and Puzzles*, St. Martin's Press, NY, 1973.
- [5] Simon, William, *Mathematical Magic*, Charles Scribner's Sons, NY, 1964.